测量与地球物理集刊　　第4号

（1982年）

目　录

射电干涉监测网……周江文（1）
TRANSIT 卫星信息提取探讨 ……杨家骏（5）
利用全球定位系统按单点法定位……宋文尧（11）
GPS 信息的相关接收……王广运（27）
论自由网平差……陶本藻（37）
一等三角锁与二等网联合平差初步方案试算报告(一)……郗钦文　张　牙（47）
一等三角锁与二等网联合平差初步方案试算报告(二)——几个理论问题……
……郗钦文（53）
水准测量往返中数系统方差的估值……庄昆元（65）
利用 TQ-16 机电算观测权的估值 ……蔡喜楣（73）
由武昌时辰站光电中星仪（WP）观测所得 464 颗星的赤经改正……
……夏炯煜　顾秀莲（79）
武昌时辰站 Danjon 等高仪焦平面位移与温度的关系 ……李劲峰（89）
短波传递时延及同步的有利时间(I) …… 张金通（93）
航空重力测量的厄特弗斯问题……张善言（97）
计算重力扰动位的简化方法……骆鸣津（105）
略论海上重力测线的布设……张赤军　毛慧琴　周景明（119）
动力重力测量的发展及其前景……李锡其（127）
鄂西山区天文水准和天文重力水准的测量工作……
……许厚泽　李瑞浩　骆鸣津　孙永庠　蒋福珍　傅兆珠　张赤军（139）
ZYZY 海洋重力仪的特性 ……张善言（161）
精密测量仪器电子恒温系统设计……潘显章（173）
平太阳时和恒星时数字石英钟……陶国祥（183）
圆锥投影的变换……孟嘉春（189）

ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA, No. 4

(1982)

Contents

The Radio Interferometric Monitoring Net ····· Zhou Jiangwen (4)
An Approach of TRANSIT Satellite Message Extraction ····· Yang Jiajun (10)
Point Positioning Concept Using Global Positioning System (NAVSTAR) ·····
····· Song Wenyao (26)
Correlation Reception of the GPS Information ····· Wang Guangyun (36)
On Adjustment of Free Nets ····· Tao Benzao (46)
Trial Computation Report of the Preliminary Scheme for the combined Adjustement of First-order Triangulation Chains and Second-order Networks (1) ·····
····· Xi Qinwen Zhang Ya (52)
Trial Computation Report of the Preliminary Scheme for the combined Adjustment of First-order Triangulation Chains and Second-order Networks (2)
——Several Theoretical Problems ····· Xi Qinwen (64)
Estimation of Systematic Variance of the Average of Fore and Back Levelling ···
····· Zhuang Kunyuan (71)
Estimating Weights of Observations Using TQ-16 Electronic Computer ·····
····· Cai Ximei (78)
Corrections of Right Ascensions of 464 Stars Obtained by the Photoelectric Transit Instrument at Wuchang Time Observatory WP ····· Xia Jiongyu Gu Xiulian (88)
On the Relation between Temperature and Displacements of Focal Plane in Danjon Astrolabe at Wuchang Time Observatory ····· Li Jingfeng (92)
The Time Delay of Short Wave Transmission and the Favourable Time of Synchronization (1) ····· Zhang Jintong (94)
On the Eötvös Problem for Aerial Gravity Measurement ····· Zhang Shanyan (104)
Simplified Method for Computing Disturbing Potential ····· Luo Mingjin (118)
On the Layout of the Marine Gravimetric Lines ·····
····· Zhang Chijun Mao Huiqin Zhou Jingming (125)
Developments and Prospects of Dynamic Gravimetry ····· Li Xiqi (137)
Test Report of the Astronomical and Astro-gravimetric Levelling in the Western Mountain Area of Hubei ····· Xu Houze Li Ruihao Luo Mingjin Sun Yongxiang Jiang Fuzhen Fu Zhaozhu Zhang Chijun (160)
The Characteristics of ZYZY Sea Gravimeter ····· Zhang Shanyan (171)
Design of Electronic Thermostatic Control Systems for Precise Measuring Instruments ····· Pan Xianzhang (181)
The Digital Crystal Clock for Solar Time and Sidereal Time ····· Tao Guoxiang (188)
Transformation of Conical Projections ····· Meng Jiachun (205)

第4号 测量与地球物理集刊 No. 4
1982年 ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA 1982

射电干涉监测网*

周江文

提　　要

本文着重研究射电干涉监测网的建立以及基本观测方程的某些问题。

监测网使用流动射电干涉设备，以若干稳定点的坐标定义一监测坐标系，将 GPS 卫星的播送轨道作系统转换使与之相应，同时求得非稳定点在同一系统中的坐标，以达到监测的目的。

独立站射电干涉测量（VLBI）是一种高功效的方法，它以特高的精度（10^{-9} 秒以上）测量天体射电到达两站的时间差(延迟)，从而推求两站（基线）坐标差，射电源方向，时间及同步参数，以及其他进入观测方程的参数。和传统方法相比，基线长度不受限制，观测周期短，基本不涉及重力场和轨道计算；用河外射电源，可以得到实际的惯性坐标系，这些条件使它必将成为天体测量和地球动力测量特别有力的手段。

河外射电源的流量密度小，因此对接收系统要求甚高。近年发展利用 GPS 卫星的射电，由于流量密度强万倍以上，接收系统已趋于微型化，这种系统用于地球动力测量将是理想的工具。

本文着重研讨地球动力监测网的建立以及基本观测方程的某些问题。

一、基本观测方程

本节讨论延迟 τ 与基线 B（列向量，长度用小写 b，下同）及钟参数的关系。假设观测河外源，源向 S（单位向量）已知，其他校正项均已改正。图 1 为 B，S 平面。射电到达站 1 与站 2 的时差即延迟 τ。

在天球坐标系中 S 不变，基线 B 则因自转向量 Ω 而有相对速度

$$V = \Omega \times B \tag{1}$$

（图中 Ω，V 不必在 B，S 平面内），在 τ 内 2 相对 1 移动了 τV，于是可得

$$c\tau = -B \cdot S - (V \cdot S)\tau \tag{2}$$

其中 c 是光速。此式视 V 为常量，实际 B，V 随时间而变，计此，式(2)将有改正项 $(\Omega \times V \cdot S)\tau^2$，其值甚微可以不计。

设天球坐标系以地球质心为原点，自转轴为 z' 轴，x' 轴指向春分点 ♈。以赤经 α

* 1981 年元月收稿。

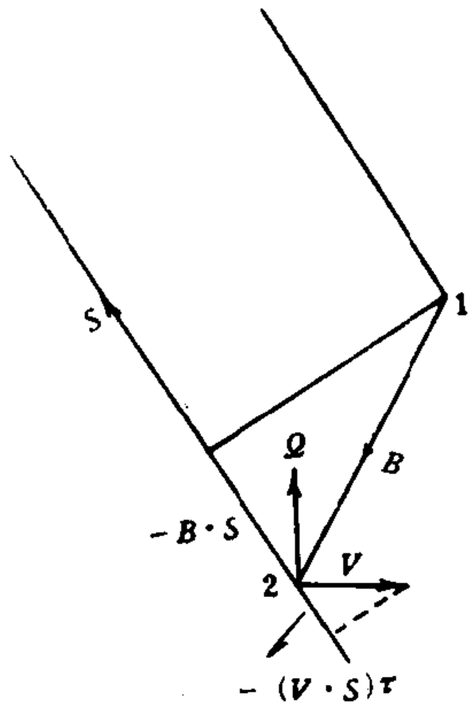


图 1

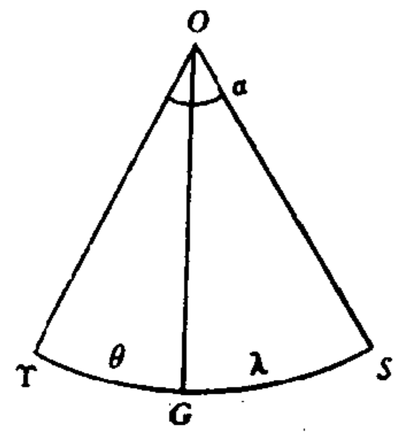


图 2

赤纬 δ 表示，

$$S = \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix} \tag{3}$$

观测方程采用地球坐标系，只是将 x 轴指向格林威治子午圈，此时赤经 α 换为经度 λ，$\alpha - \theta = \lambda$，$\theta$ 是格林威治恒星时。在此系统中

$$B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\lambda \\ \sin\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{4}$$

由是

$$B \cdot S = ux + vy + wz \tag{5}$$

$$V \cdot S = \Omega \times B \cdot S = wvx - wuy \tag{6}$$

延迟的观测值中还有来自仪器的部分 $i + gt$。其中 i 代表时元两站同步参数，包括钟及线路延迟之差，g 代表 i 的变率。

总起来得到基本观测方程

$$\begin{aligned} &c\tau + \omega\tau(vx - uy) + e \\ &= c\tau + \omega\cos\delta\tau(\sin\lambda x - \cos\lambda y) + e \\ &= -ux - vy - wz + ci + ctg \\ &= -\cos\delta\cos\lambda x - \cos\delta\sin\lambda y - \sin\delta z + ci + ctg \end{aligned} \tag{7}$$

ω 是自转速率，$\dot{\lambda} = -\omega$，τ 是时间的函数。e 是 $c\tau$ 的误差，主要来自对流层中水汽影响的测定及频率稳定性。（7）式中含 ω 的项是自转项，可作校正项用足够的近似值计算之。

量测量是 τ，不计其他未知量，dx 的最小值为 $cd\tau$，若取 $cd\tau = \lambda$(一波长)，则得 $dx = \lambda$，通常称之为 x 的分辨率，y 和 z 亦同。同样可得

$$di = d\tau = \frac{\lambda}{c},\ dS = \frac{c}{b}d\tau = \frac{\lambda}{b}。$$

取 $\lambda = 20$ 厘米($f = 1.5$ 兆赫)，$b = 2000$ 公里，则有 $dB = 20$ 厘米，$di = \frac{2}{3} \times 10^{-9}$ 秒，$dS = 0.02$ 时秒，这些是基本精度数字。大量观测经处理后，精度可提高一量级。

文献中经常提到延迟率 $\dot{\tau}$（或条纹率 $f\dot{\tau}$），$\dot{\tau}$ 从量测精度或方程精度看，都远不及 τ。因此增加 $\dot{\tau}$ 并不是很可取的。

二、卫星射电干涉监测网

利用 GPS 卫星的强射电，有利于降低接收要求，增大装备的流动性，已如前述。在数据处理上有两个问题必须计及：

（1）卫星高度约 20000 公里，射电波前为球面，须经改正方适用平面波前公式。由图 3，延迟距离须作球面改正

$$\Delta = G2' - G2 = h + b' - \sqrt{h^2 + b^2 + 2hb'} \tag{8}$$

为计算 Δ，对 h 的要求不高。设 $\Lambda = 90°$，则 $b' = 0$，

$$\Delta \sim -\frac{b^2}{2h} \tag{9}$$

$$d\Delta \sim \frac{b^2}{2h^2} dh \tag{10}$$

设 $b = \frac{h}{50}$（400 公里），$dh = 50$ 米只相应 $d\Delta = 1$ 厘米。

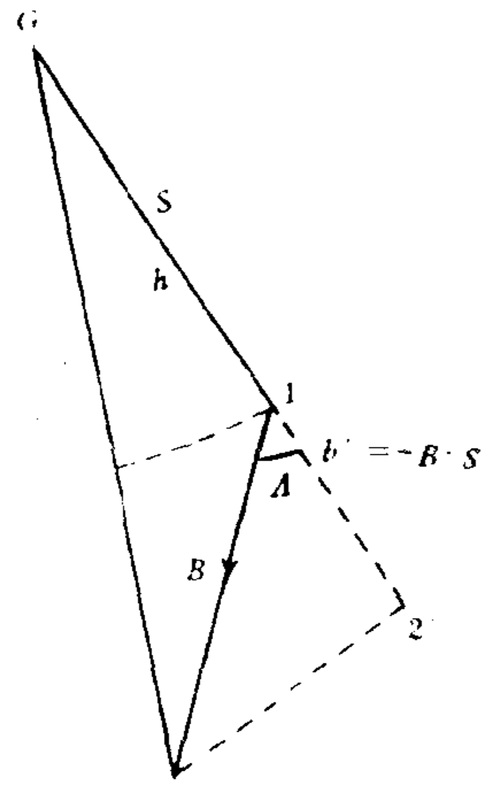


图 3

（2）假设监测网在数百公里范围以内，其中有部分点是稳定的（如图 4 的 1，2，3）。

射电干涉只能求得点的相对坐标。

地潮（及海潮负荷，下同）影响全网，在上述范围内位移向量近似相等，在处理时可仅作地潮差（相对一固定点）改正，计算要求不高。

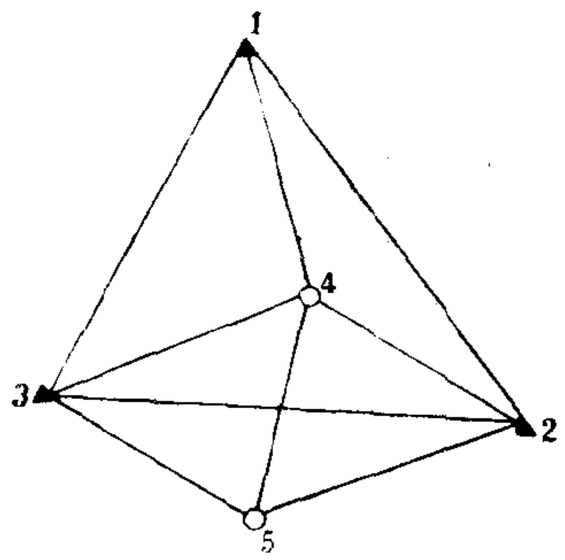


图 4

对稳定点作加强观测，处理后求得其坐标，以后除改正地潮差外，作为固定值，以此定义监测坐标系。

卫星轨道由统一的跟测网测定，播发的星历更有较大的误差。卫星坐标系与监测坐标系之间，可设一平均的坐标旋转，以旋转矩阵 $R(p, q, r)$ 表示，于是 S 应换为 RS。τ 的量测与监测坐标系之间还可设一平均尺度因子 μ，即 τ 应换为 $(1 + \mu)\tau$。

一次处理时段可设在一小时以内。p, q, r, μ 等系统参数由观测方程与其他参数同时求出。从卫星网到地面监测网尺度缩小几十倍，因此系统参数的精度要求不高。由于监测网范围不大，介质测定影响也不大。

由上可见，可以期望求得非稳定点的良好监测坐标。

图 4，设固定点坐标 ξ_1, ξ_2, ξ_3 及 η, ζ，非稳定点坐标 $\xi_4 + d\xi_4, \xi_5 + d\xi_5 \cdots$；同步

参数 $i_{21}, i_{31}, i_{41}, i_{51}$ 及 g，其余的 i, g 以它们表达之。ξ_4, ξ_5 等是近似坐标，近似坐标差以 x 等表之，

如
$$\xi_5 + d\xi_5 - \xi_4 - d\xi_4 = x_{45} + d\xi_5 - d\xi_4$$

又
$$RS = \begin{bmatrix} 1 & r & -q \\ -r & 1 & p \\ q & -p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + rv - qw \\ -ru + v + pw \\ qu - pv + w \end{bmatrix} \tag{11}$$

此时，例如 45 的观测方程写成

$$\begin{aligned} & c\tau_{45} + w\tau_{45}(v_4x_{45} - u_4y_{45}) + u_4x_{45} + v_4y_{45} + w_4z_{45} + e_{45} \\ & = -c\mu\tau_{45} - u_4(d\xi_5 - d\xi_4) - v_4(d\eta_5 - d\eta_4) - w_4(d\zeta_5 - d\zeta_4) \\ & \quad + g_pp + g_qq + g_rr + c(i_{51} - i_{41}) + ct(g_{51} - g_{41}) \end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} g_p &= -w_4y_{45} + v_4z_{45} \\ g_q &= w_4x_{45} - u_4z_{45} \\ g_r &= -v_4x_{45} + u_4y_{45} \end{aligned} \tag{13}$$

如图 4 的网中共有系统参数 4，同步参数 8，非稳定点坐标改正 6，共有待定参数 18。

THE RADIO INTERFEROMETRIC MONITORING NET

Zhou Jiangwen

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper emphasis is put on the installation of a monitoring net and on some problems about the fundamental observation equations.

Only mobile interferometric systems are needed in the net and a monitoring coordinate system is defined by fixing the well determined coordinates of some stable stations. In this fixed system the broadcast position of the GPS satellites will be transformed and the coordinates of unstable stations determined, thus being comparable among different times.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

TRANSIT 卫星信息提取探讨*

杨　家　骏

摘　　要

为了改进多普勒观测方法的数学模型，采用更合理的观测方程参数，必先解决从磁带上提取原始数据问题。

本文专门讨论了 MX 1502 接收机磁带记录格式和数据转换方法，如配以适当程序，就可将记录过的磁带装在国产计算机上打印出所需原始数据。

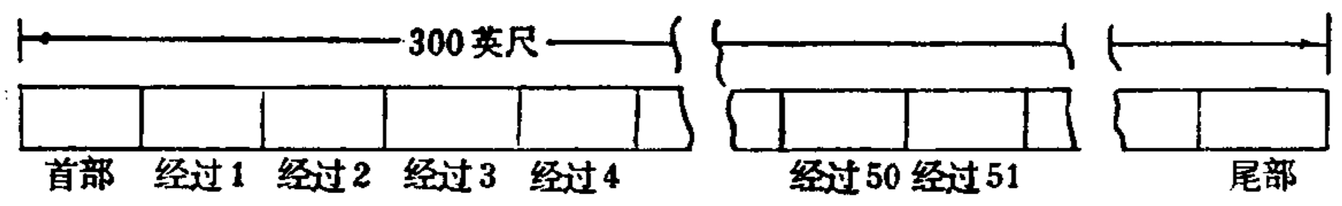
为了改进多普勒观测方法的数学模型，采用更合理的观测方程参数，必先解决从磁带上提取原始数据问题。为此研究 Transit 卫星信息结构，探讨二进制比特（bit）转换特点就显得很有必要。

地面接收机所接收到的 Transit 卫星信息主要包括下面三部分：

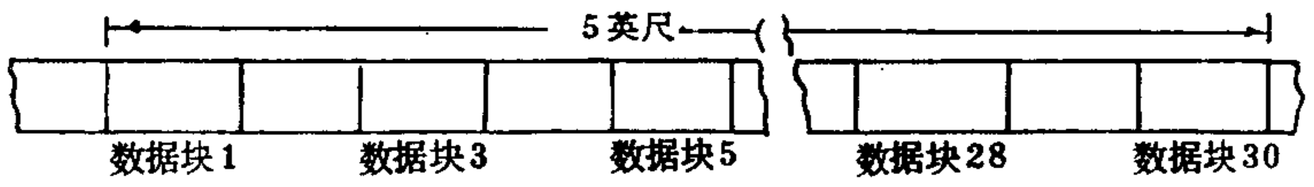
（1）轨道数据：定参数和变参数；

（2）符合 UTC 偶数分钟的时标；

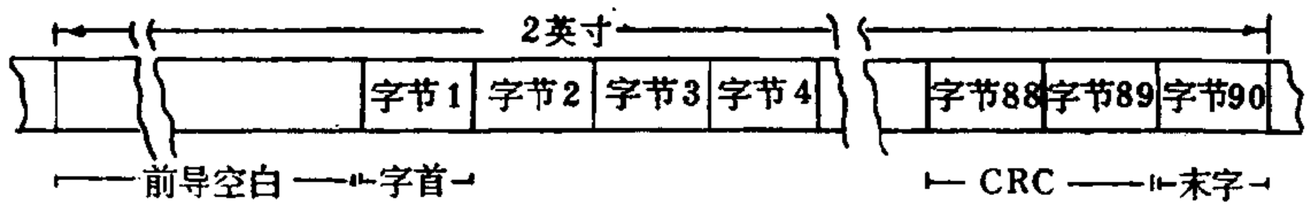
（3）400 兆赫和 150 兆赫多普勒周数，它相应于各该频率的多普勒频移。



（a）磁带上记录的卫星经过排列格式



（b）　一次卫星经过的数据块（最多时）　排列格式



（c）　每一数据块的排列格式

图 1　磁带记录排列格式

* 1980 年 8 月收稿。

所有卫星信息包括接收机微处理机初步计算结果均记录在特制的盒式磁带上，目前采用的接收机常用 MFE DC-30HL 磁带，全长有 250 英尺和 300 英尺两种，前者约可记录 50—60 次卫星经过，后者约可记录 70—80 次卫星经过。现以 MX1502 接收机在 300 英尺长的磁带上所记录的卫星信息为例，其排列格式如图 1(a)。

图 1(b) 表示一次卫星经过(约 18 分钟)全部记下所有 2 分钟信息，即数据块最多时的排列格式，通常都小于此数。图 1(c) 表示每一数据块的排列格式，包括前面一段前导空白在内，共占 2 英寸长，全部通过记录头需时 200 毫秒。每个数据块毫无例外地均包含 90 个 8 比特字节 (byte)，见表 1。

表 1

字 节	意 义
1	首字，10101010
2—87	数据记录，占 86 字节
88—89	循环冗余码检验特征位 (CRC)，占 2 字节
90	末字，10101010

其中只有第 2 到第 87 字节代表有效的数据记录。为表达方便，简短和易于用直观方法进行数制转换，也常用三位八进制数表示每个字节(此时可在每个字节的 8 比特前加上一个“0”比特，再通过二进变八进的转换得到)。

浮点格式

浮点数均占 4 个字节(共 32 比特)，数符占 1 位，尾数占 23 位，阶符占 1 位，阶码占 7 位，共 32 位，见图 2。数符为“0”代表正，为“1”代表负，而阶符则相反，取“0”代表负，取“1”

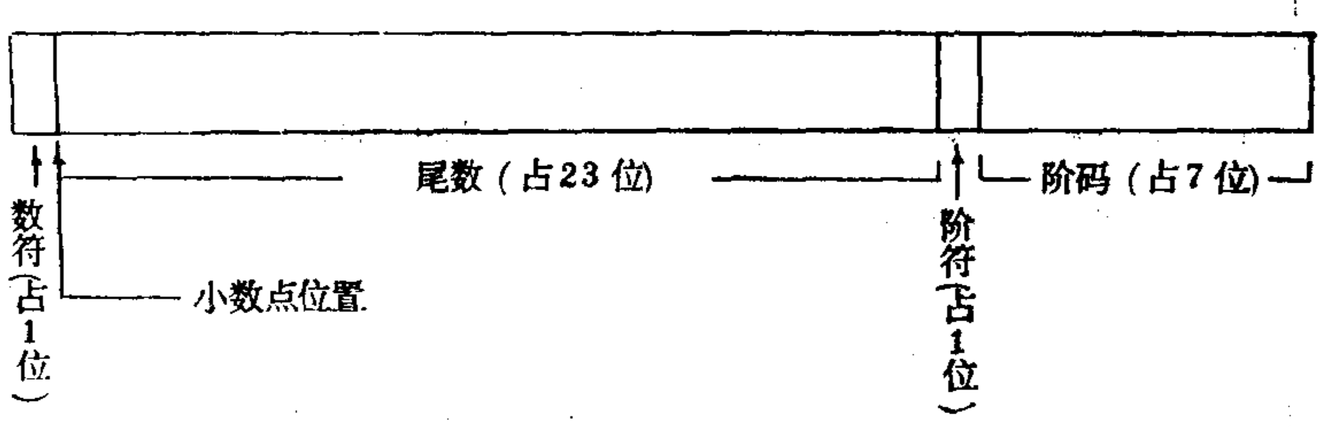


图 2 浮点记录格式

代表正。分数都是规格化形式，均以 2 的补码形式表示。先按阶码阶符定出尾数小数点位置，随后转换成基数为 10 的数，即得所代表的原始数据。

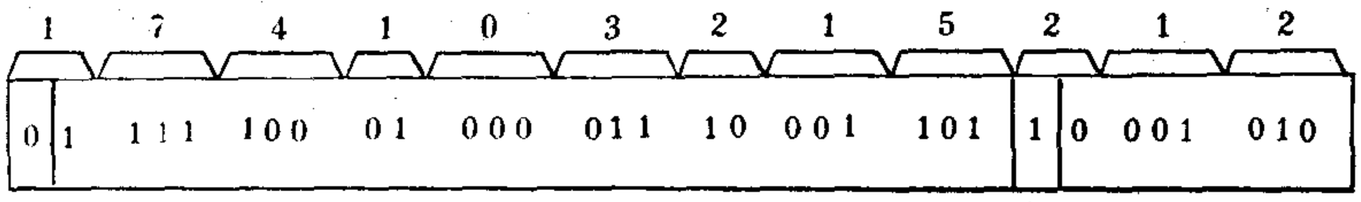


图 3

例如以八进制数表示的某高程读数为 174 103 215 212，按 32 比特的二进数表示见图 3。顾及阶码阶符为 $+(10)_{10}$，最后得十进数为：

+994.11

浮点格式常用来表示经纬度、高程、仰角、中误差及 GMT 等。

定点格式

本格式由 5 个字节 (40 比特)组成，每 4 比特结成一组，除第一组表示“特征位”外，其余九组均表示一个 BCD XS3 (余三代码)字符，代表九个十进制数，小数点位置按轨道参数译码规则规定(见图 6，表 3)。

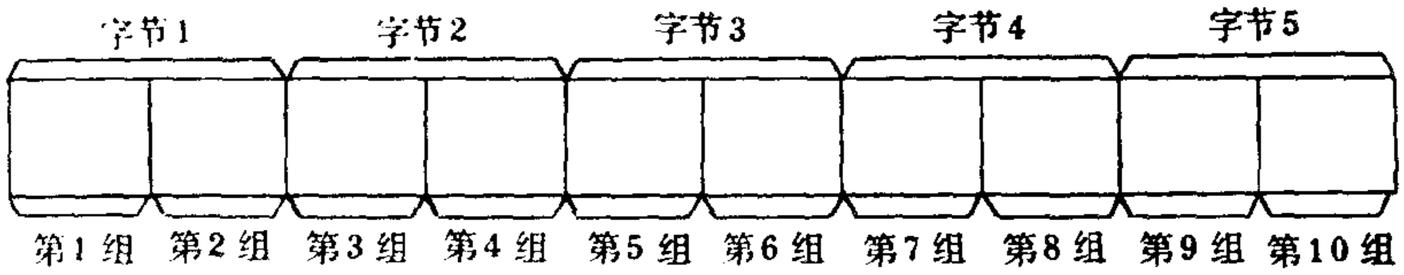


图 4

定点格式排列如图 4，图 4 中第 1 组“特征位”的意义如下：

0000—0——没有预置参数；

0001—1——只有一个参数读数；

0011—3——取两个不同读数的第一个；

1111——1——对参数已进行过多数判决。

余三代码、二—十进数和十进数关系见表 2。

表 2

BCD XS3	BCD 8-4-2-1	十进数	BCD XS3	BCD 8-4-2-1	十进数
0011	0000	0	1000	0101	5
0100	0001	1	1001	0110	6
0101	0010	2	1010	0111	7
0110	0011	3	1011	1000	8
0111	0100	4	1100	1001	9

第 2 组到第 10 组每组 4 比特代表一个余三代码数字，经数制转换后，可得一个九位的十进制数。

例如以八进数表示的某 t_p 值为 363 106 123 250 243 按 40 比特的二进数表示如图 5，

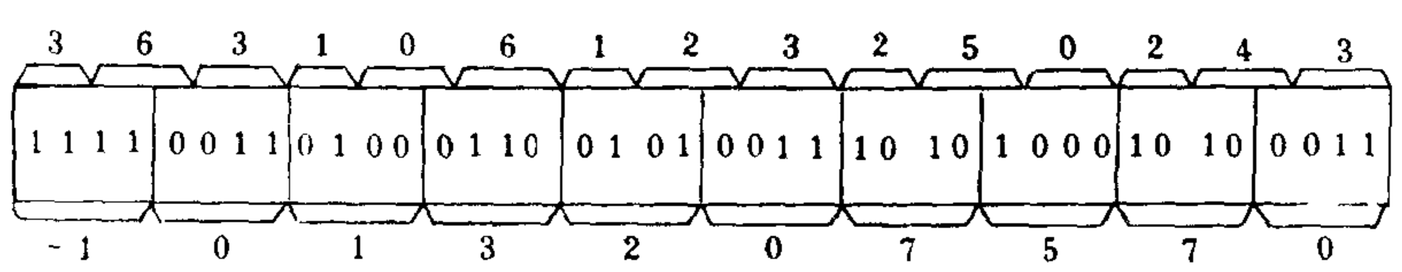


图 5

第 1 组“—1”表示本数已经多数判决（大多数情形都是“—1”）。然后从第 2 组到第 10 组按余三代码格式转换成十进数为：

0132.07570[1)]

定点格式常用来表示轨道参数(定参数和变参数)值。

每次卫星经过能记录到的数据块数目随观测条件好坏、测站搬迁次数有所不同，在观测条件良好时，多普勒数据块数量最多可占 24 块，包括全部记录在内的总数最多可达 30 块。

全部记录中，与原始数据有关的是第 4 数据块(变参数)、第 5 数据块(定参数)和第 6 到第 29 数据块(多普勒周数)。所有数据块内各字节都按八进地址入位。

轨道参数(第 4 和第 5 数据块)译码按表 3 和图 6 所示规律进行。

表 3

轨道要素	定 参 数	译 码
t_p	4 411 506 90	+1411.5069分
n	8 372 658 30	+ 3.3726583度/分†
ω_p	8 021 728 60	+ 21.7286度
$\dot{\omega}$	8 002 003 30	+ 0.0020033度/分
ε	8 000 525 90	+ 0.005259
A_p	8 074 538 60	+7453.86公里
Ω_p	8 017 931 40	+ 17.9314度
$\dot{\Omega}$	9 000 054 30	− 0.0000543度/分
$\cos i$	8 001 312 30	+ 0.013123
λ_G	8 116 777 70	+ 116.7777度
卫星识别号	8 003 014 00	30140
信号注入时间	8 705 002 40	第 24 天，第 1410 分
$\sin i$	8 099 991 40	+ 0.999914
ΔF	8 015 000 00	80.150

† 本栏译码恒为 3. …。

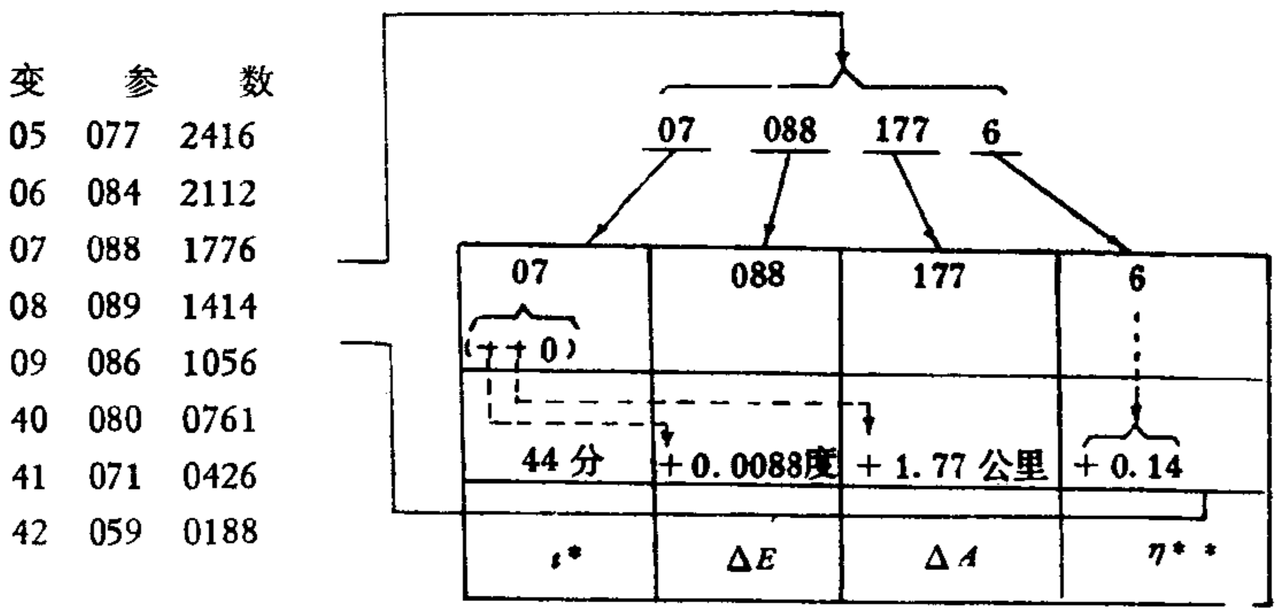


图 6

* 时间 t 系半小时后的第 7 个 2 分钟即 44 分。

** n 每 4 分钟播发一次，t 能被 4 整除的变参数第 9 位为 n 的第一位数字(需译码)，下行第 9 位数为 n 的第二位数字。

1) 小数点位置和进一步译码方法按图 6，表 3 规定。

定参数(表 3) 第一位数字意义

0 = ++0	5 = +−1
1 = +−0	6 = −+1
2 = −+0	7 = −−1
3 = −−0	8 = +
4 = ++1	9 = −

图 6 中第一位数字意义同表 3，其中第一个符号代表 ΔE 的符号，第二个符号代表 ΔA 的符号。

变参数 (图 6) n 第一位数字意义

0 = −0.0	5 = +0.0
1 = −0.4	6 = +0.1
2 = −0.3	7 = +0.2
3 = −0.2	8 = +0.3
4 = −0.1	9 = +0.4

下面进一步说明多普勒周数 (第 6 到第 29 数据块) 的记录格式和译码方法。第 6 到第 29 共 24 个数据块，每块可容纳 10 个 4.6/4.97 秒间隔，其记录形式完全相同，每次卫星经过最多时可记下 9 帧 2 分钟电文，而每帧电文具有 26 个 4.6/4.97 秒间隔，因此一次卫星经过最多可记录到 9 × 26 = 234 个 4.6/4.97 秒间隔的多普勒周数，恰好占据 24 个数据块。但实际工作中，往往小于上述观测量，每少观测 10 个多普勒间隔，就省下一个数据块。

90 字节的数据块除首字、末字和 CRC 外，还剩 86 字节，每个字节均按八进地址入位。多普勒数据共占 80 字节(八进地址编号为 4—123)，其具体排列见图 7 (框内数字代表该字的八进地址号)。

80 字节共分 10 行 8 列，第 1 列和第 4 列各代表 400 兆赫和 150 兆赫的最小讯号电平，仪器根据此值对数据进行取舍。

400 兆赫频道 4.6/4.97 秒间隔的多普勒周数共 17 比特由每行第 2 列和第 3 列合成，第 3 列置前，第 2 列置后，最高有效位是第 3 列首位，最低有效位是第 2 列末字，两列合成 16 比特。当第 3 列前两比特均为“1”时，在最高有效位前附加一个“0”

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	5	6	7	10	11	12	13
2	14	15	16	17	20	21	22	23
3	24	25	26	27	30	31	32	33
4	34	35	36	37	40	41	42	43
5	44	45	46	47	50	51	52	53
6	54	55	56	57	60	61	62	63
7	64	65	66	67	70	71	72	73
8	74	75	76	77	100	101	102	103
9	104	105	106	107	110	111	112	113
10	114	115	116	117	120	121	122	123

图 7　多普勒数据排列图

比特，否则附加一个“1”比特。在任何一种情况下，都要在最低有效位后附加一个“0”比特，总共 18 比特。然后将此 18 比特转换为以 10 为基数的数，即得 400 兆赫频道多普勒周数。

150 兆赫频道的 4.6/4.97 秒间隔的多普勒周数，其前 9 比特（包括一个附加比特在内）同于 400 兆赫频道第 3 列数值，后 9 比特由第 5 列比特值代数地加到第 2 列上获得。相加时，若第一位有进位，则舍去进位。最后将 18 比特化算成以 10 为基数的值，即得 150 兆赫频道多普勒周数。

举例如表 4。

表 4

频道 / 数制	400 兆赫频道多普勒周数				某行第 5 列字节	150 兆赫频道多普勒周数			
	附加比特	某行第 3 列字节	某行第 2 列字节	附加比特		附加比特	第 3 列字节	第 2 列加第 5 列字节	附加比特
八进		024	352		327				
二进	1	00010100	11101010	0	11010111	1	00010100	11000001	0
十进		141780					141698		

第 6 列表示在多普勒周数间隔期间所施加的钟脉冲累加数，第 7 第 8 列分别表示多普勒间隔末尾 400 兆赫和 150 兆赫钟读数，经二进变十进转换后，就可得到以 10 为基数表示的钟读数和钟脉冲改正数。

以上讨论了磁带记录格式及数据转换方法，如再配以适当程序（因计算机而异），就可将记录过的磁带装在国产计算机上打印出所需原始数据，为改进数学模型，选用更合理的观测方程参数提供必要准备。

AN APPROACH OF TRANSIT SATELLITE MESSAGE EXTRACTION

Yang Jiajun

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

In order to refine the mathematical model of the Doppler observation method and adopt more reasonable parameters of observation equations, it is necessary to resolve precedently the problem of raw data obtained on the recorded magnetic tape.

In this paper the record format of the magnetic tape of the MX 1502 receiver and the transfer method are discussed exclusively. It will be possible to load the recorded magnetic tape on the computer made in China and print out the needed raw data if we adopt the pertinent program.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

利用全球定位系统按单点法定位*

宋 文 尧

摘　　要

本文讨论了全球定位系统的信号特征、电文结构、误差分析、单点定位原理以及精度估算，探讨了 Transit 系统有关技术和数学模型引用到 GPS 中的可能性，展望了该系统的发展前景。

全球定位系统（Global Positioning System NAVSTAR——简称 GPS）是一种正在发展中的全天候、高精度、快速实时定位的卫星导航系统，从测盖范围、信号可靠性、数据内容、准确度以及多用性这五项指标来看，都优于 Transit 卫星导航系统，是其他现代无线电导航系统所无法比拟的，它可用于大地测量、地学考察、确定极移参数、时间比对、近地卫星定位、改进武器发射精度以及军用民用导航定位，同时 GPS 卫星所发播的信号亦可作为人造射电源进行独立站射电干涉测量，使天线和接收设备大大缩小，因此引起国际大地测量和现代无线电导航学者的高度重视，为此本文就单点法定位系统地讨论信号特征、电文结构、误差影响、定位原理及其精度估算，探讨了 Transit 系统的有关技术和数学模式引用到 GPS 的可能性，展望了该系统的发展趋势。

一、GPS 信号特征

卫星钟的标频为 10.23 兆赫，它控制着码钟和发射频率，GPS 信号包括两种频率发播，即

$$L_1 = 10.23 \times 154 = 1575.42 \text{ 兆赫}$$

$$L_2 = 10.23 \times 120 = 1227.60 \text{ 兆赫}$$

在 L_1 波段上，双相调制成正交的 P 码（亦称精密码——长码）和 C/A 码（亦称粗搜索码——短码），P 码的调制速率（亦称码钟速率）为 10.23 兆比特/秒，码的持续时间（亦称码长）为一星期，即每星期六夜晚、星期日子夜的格林威治平时为 P 码的初始时间。C/A 码是短码，码长为 1 毫秒，其调制速率为 1.023 兆比特/秒，该码容易达到迅速拦截卫星的要求，并可通过电文交接码（HOW）变换到 P 码上。

如图 1 所示，在 L_1 波段载波相位分量上调制成 P 信号 $P \oplus D$，并且在 90° 相移载波分量上调制成 C/A 信号 $C/A \oplus D$。可用下列方程式表示：

* 1980 年 12 月收稿。

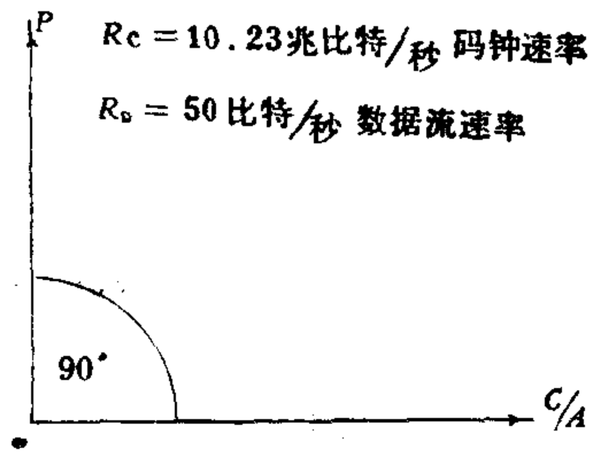


图 1

$$S_{L1i}(t) = \underbrace{A_P XP_i(t)D_i(t)\cos(\omega_1 t + \Phi)}_{P} + \underbrace{A_C XG_i(t)D_i(t)\sin(\omega_1 t + \Phi)}_{C/A} \quad (1)$$

式中 ω_1——由 L_1 决定的角频率；

Φ——很小的相位噪声和振荡器漂移分量；

公式右端第一项表示 P 码情况，其 A_P 为振幅，$XP_i(t)$ 表示调制速率为 10.23 兆比特/秒，周期为一星期的 ±1 的伪随机噪声序列，$D_i(t)$ 表示振幅为 ±1，数据流速率为50比特/秒，周期为每 6 秒钟一子帧、30 秒钟一全帧电文。公式右端第二项表示 C/A 码情况，其中 A_C 为振幅，XG_i 表示调制速率为 1.023 兆比特/秒，周期为 1 毫秒 1023 比特的独特的 Gold 码（R, Gold 为研究编码的作者名），$D_i(t)$ 同 P 码电文。C/A 码的信号强度比 P 码大 3—6 分贝。

P 码　每颗卫星 i 的 P 码是两个伪噪声码即 $X1(t)$ 和 $X2(t + n_i t)$ 的乘积。$X1$ 具有 1.5 秒 15,345,000 比特间隔周期，$X2$ 具有 15,345,037 比特间隔周期，$X2$ 比 $X1$ 长了 37 比特间隔，两种序列在每星期六夜晚、星期日子夜的相同初始时间起开始重播的。$X1$ 和 $X2$ 是在 10.23 兆比特/秒速率上同相计时的，P 码是下列形式的乘积码：

$$XP_i(t) = X1(t)X2(t + n_i T) \quad 0 \leqslant n_i \leqslant 36 \quad (2)$$

这里 $X1(t)$ 和 $X2(t)$ 之间的延迟为每 T 秒的 n_i 码钟间隔，每颗卫星具有唯一的码偏 $n_i T$，这样不可能有一颗卫星的 P 码匹配另一颗卫星 P 码的任何有效部分，因此有 37 个不同的 P 码，如果考虑到 P 码连续但不重置，则 P 码周期稍大于 38 个星期，即 P 码的 7 天相位段的完整周期为 267 天，全部周期实际上是细分的，因而每颗卫星所得到的一个星期周期与其他卫星是不重叠的。

通过每 1.5 秒钟的 Z 计数，又已知某一子帧电文的初始时间和交接码（HOW）可以得到下一子帧电文的初始时间 P 码。

C/A 码　它在 1.023 兆比特/秒比特速率上码长为 1 毫秒、1023 比特周期的短码，每颗卫星的 C/A 码由调制速率为 1023 比特的两种伪噪声 $G1(t)$ 和 $G2(t)$ 的乘积所组成的 Gold 码，这种乘积码的周期也是 1023 比特，表示为

$$XG(t) = G1(t)G2[t + N_i(10T)] \quad (3)$$

N_i 规定为 $G1$ 和 $G2$ 之间在间隔上的相位偏移，必须注意 C/A 码的间隔具有 $10T$ 的持续时间，存在 1023 个不同的偏移 N_i，由此就有该种格式的 1023 个不同的代码。

$L2$ 信号　它也是双相正交调制成 P 码和 C/A 码，由地面站遥控选择 P 码。$L2$ 信号表示为

$$SL2(t) = B_p XP_i(t) D_i(t) \cos(\omega_2 t + 4)$$

这里 B_p 表示信号振幅，$XP_i(t)$ 为第 i 颗卫星的 P 码，与 $L1$ 波段的码同步计时，$D_i(t)$ 为 50 比特/秒的电文数据流。

二、GPS 电文结构

GPS 导航电文包括了卫星状态数据、C/A 码变换到 P 码的时间同步数据、卫星钟改正参数、电离层传播延迟的模式参数(供 C/A 码用)、卫星星历和年历。年历列出了近似星历和全部卫星的状态数据，以满足信号拦截的需要，数据格式中还包括了备用的特殊电文。

一帧电文包括 30 秒 1500 比特，其数据流速率为 50 比特，全帧分成 5 个子帧，每子帧为 6 秒 300 比特，有 10 个字码，每字码为 30 比特。各子帧的起始时间同步到 GPS 标准时间，其同步精度为 1 毫微秒，对 L_1, L_2 波段上的 P, C/A 信号来说，电文数据是公用的，如图 2 所示。

每个子帧开始的第一、二字码是遥测字码（TLM）和交接字码（HOW），这两个字码是由卫星所给定的，其他 8 个字码是主控站所注入的导航数据，现分段介绍如下：

1. TLM 和 HOW 字码

TLM 字码包括 8 比特的序文（同步格式），14 比特 TLM 电文、2 比特无信息定向位以及 6 比特的奇偶位。TLM 电文包括注入状况电文、诊断电文和其他电文。

HOW 字码包括 17 比特的 Z 计数（下一子帧的前沿卫星时间）、1 比特的同步特征位、3 比特子帧辨别、2 比特无信息定向位和 6 比特的奇偶位。

2. 数据块 I——卫星钟改正

数据块 I 出现在第一子帧电文中，每 30 秒重播，该数据由地面控制系统所注入的，它包括了频率标准的改正、所伴随时期（AODC）字码以及电离层传播延迟模式参数。

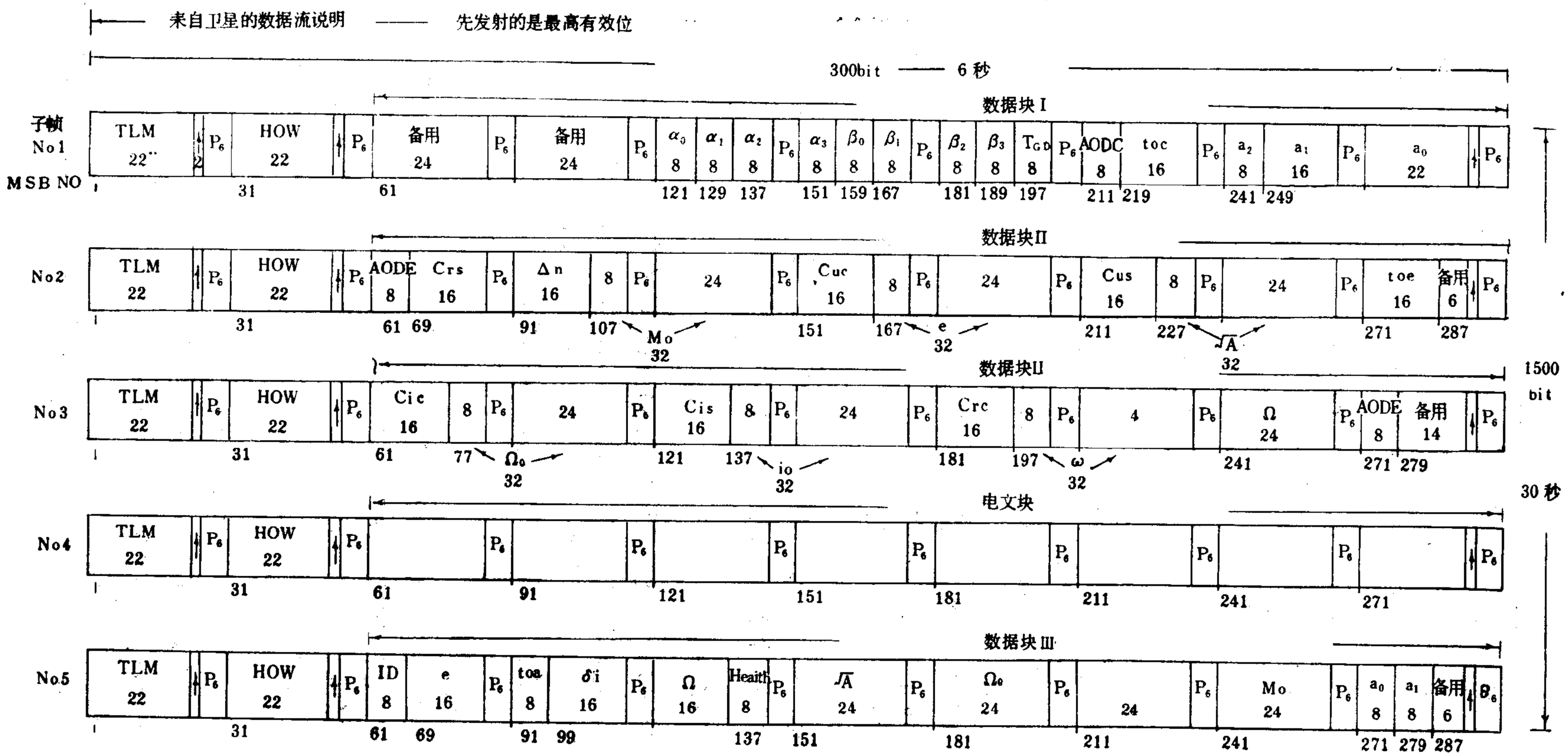
卫星钟的改正参数是提供用户计算相对于 GPS 标准时间的卫星钟钟差。卫星钟改正模式有三个系数即 a_0, a_1, a_2 以及标准时间 t_{0c}，按下列方程式(以秒计)可修正所接收的卫星信号时间。

$$t = t_{SV} - \Delta t_{SV} \tag{4}$$

$$\Delta t_{SV} = a_0 + a_1(t - t_{0c}) + a_2(t - t_{0c})^2 \tag{5}$$

此处 t 为 GPS 标准时间，以秒计，t_{SV} 为电文发射时间的卫星代码相位时间，以秒计，t_{0c} 为数据块 I 的标准时间，以秒计。

此外，数据块 I 也包括了数据字码（AODC）的卫星钟改正参数期限，单频用户的



·· 比特数

P_6 6 奇偶位

用于奇偶性计算的 2 个非信息定向位

TLM 遥测码　　HOW 交接码

注意：全部二进位数字是二进制的补码

图 2　GPS 导航电文格式

$L_1 - L_2$ 改正参数（TGD）和 8 个电离层改正参数。

$$\mathrm{AODC} = t_{0c} - t_L \tag{6}$$

此处 t_{0c} 为标准时间，t_L 为估算改正参数的最后测量修正时间，T_{GD} 提供单频用户电离层折射改正，即用 1.546 近似因子(参见第三节 GPS 误差分析)乘以差值 $(L_1 - L_2)$。

3. 数据块 II——GPS 卫星星历

数据块 II 包括第二和第三两个子帧之中，每 30 秒重复出现，它是由 GPS 控制部分所注入的，数据块 II 各参数的意义见表 1。

表 1

参数	意　　义	参数	意　　义
M_0	标准时间的平近点角	C_{uc}	升交角距 cos 调和函数改正项的变幅
$\triangle n$	平角速差的计算值	C_{us}	升交角距 sin 调和函数改正项的变幅
e	偏心率	C_{rc}	轨道半径 cos 调和函数改正项的变幅
$\sqrt{A}$	长半轴的平方根	C_{rs}	轨道半径 sin 调和函数改正项的变幅
Ω_0	标准时间的赤经	C_{ic}	倾角 cos 调和函数改正项的变幅
i_0	标准时间的倾角	C_{is}	倾角 sin 调和函数改正项的变幅
ω	近地点角距	t_{oe}	星历的标准时间
$\dot{\Omega}$	赤经速率	AODE	数据的期限

4. 数据块 III——年历

数据块 III 列入电文的第五子帧中，它包含了 25 个子帧的数据内容，每 30 秒循环轮流出现，其重复周期为 $25 \times 30 = 750$ 秒。数据内容为 24 颗卫星的年历，分布在 1 至 24 帧电文的第五子帧中，25 帧电文的第五子帧是卫星辨别符号（ID）的虚构年历。

卫星年历包括着粗略星历根数、时钟改正参数、卫星辨别符号以及卫星状况信息，作为直接拦截卫星信号之用。年历和卫星钟改正模式是根据数据块 I，II 的数学模式截断某些项。

假定 $a_2 = 0$，则年历的卫星钟改正方程式为

$$\Delta t_{SV} = a_0 + a_1(t - t_{0a}) \tag{7}$$

式中 t_{0a} 为数据 III 的标准时间，以秒计，a_1 同数据块 I 中的参数，即

$$\underbrace{a_0}_{\text{数据块 III}} = \underbrace{a_0}_{\text{数据块 I}} + \underbrace{a_1}_{\text{数据块 I}}(t_{0a} - t_{0c}) \tag{8}$$

年历中的轨道根数与数据块 II 相同，仅假定某些参数为零。不假定为零的参数是基本 7 个开普勒根数（$M_0, t_{0a}, e, \sqrt{A}, \Omega_0, i_0 + \delta_i, \omega$）和赤经变率 $\dot{\Omega}$，为了节省数据比特，倾角 i 假定为 60°，又附加 δ_i 的修正值。

5. 电文块

电文块占用第四子帧，由地面控制部分所注入的，为了 GPS 未来工作的需要，作为传送字母数字数据(混合编制)给用户。

三、GPS 误差分析

GPS 观测的误差来源可分为卫星星历误差(包括卫星钟预测误差)、信号传播误差(包括电离层折射、对流层折射以及多路径影响)和接收误差。

1. 星历误差

卫星星历是根据四个控制站所获得的数据由范登堡空军基地与海军地面武器中心共同处理。经过亚利桑那州尤马试验场试验其星历和卫星钟的预测误差：二小时内星历的径向误差为 0.818 米，切向误差为 6.31 米，极向误差为 3.01 米，卫星钟的预测误差为 7.7 毫微秒 (1 毫微秒相当距离误差为 0.3 米)，星历的预测误差为 2—3 米，相当于距离误差为 1—2 米，要达到上述要求是有困难的，为此提出第一阶段星历误差折合距离误差为 3.6 米(1σ)，第三阶段为 1.5 米 (1σ)。 卫星的切向和极向误差是通过很小角度投影到卫星—测站的斜距上， 3 米的切向误差投影到测距误差为 1 米或更小，主要误差来自径向误差的不准确性，对于 GPS 来说，径向误差与卫星钟钟差是十分相关的。

2. 卫星钟误差和相对论频移

卫星钟除振荡器的缓慢频漂外，还存在广义和狭义相对论的时钟偏移，下面列出该项影响的表达式为

$$\frac{f_r}{f_t} = 1 + \underbrace{\frac{1}{c}(\Phi_t - \Phi_r)}_{\text{引力位(广义相对论)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{V_r^2}{c^2} - \frac{V_t^2}{c^2}\right)}_{\text{狭义相对论偏移}} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{k}}{c}(\boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}_r)}_{\text{正常多普勒影响}} + \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{高阶项} \\ (V/c)^3 \text{等}}} = 1 + \delta \qquad (9)$$

式中 f_r 为地面站所接收的时钟频率，f_t 为卫星钟发射的时钟频率。 接收机所接收卫星频率增大了 $\delta \approx 447.9\times10^{-12}$，或者时间偏移 448 微微秒/秒(相当于 38.7 微秒/天)，地球扁率和太阳摄动为445.8×10^{-12} 到 450.2×10^{-12}， 因此卫星钟有意偏低为 10.22999999545 兆赫，相对于标称值 10.23 兆赫来说， 频率低了 4.55×10^{-10}，这样能够改正相对论的大部分影响。

3. 电离层折射

卫星射频信号穿过电离层后，使传播速度减小和射线弯曲而产生时延，这种时延与频率平方成反比，一般白天可达 50 毫微秒(相当距离误差 15 米)，夜晚可达 10 毫微秒(相当距离误差 3 米)，利用双频可以消除电离层延迟的一阶项，其公式为

$$\begin{aligned}\tau_{GD} &= \frac{R}{c} + \frac{A}{f^2} + \frac{B}{f^3} + \frac{C}{f^4} \\ &\approx \frac{R}{c} + \frac{A}{f^2}\end{aligned} \qquad (10)$$

上式 τ_{GD} 为包含着电离层折射的信号传播时延，R 为卫星到测站的真实距离，c 为光速，

f 为载频，B 正比于沿着路径的平均地磁场强度，当 $f = 1.5$ 千兆赫时，$B/f^3 \leqslant 0.025$ 米，$c/f^4 \leqslant 0.076$ 米。首先令 $\alpha = \frac{f_{L_1}}{f_{L_2}} = \frac{1575.42}{1227.60} = \frac{77}{60}$，根据公式(10)，可以求得

$$\Delta\tau \triangleq \tau_{GDL_2} - \tau_{GDL_1} = A\left[\frac{1}{f_{L_2}^2} - \frac{1}{f_{L_1}^2}\right]$$

$$= \frac{A}{f_{L_1}^2}\left[\frac{f_{L_1}^2 - f_{L_2}^2}{f_{L_2}^4}\right]$$

$$= \frac{A}{f_{L_1}^2}\left[\left(\frac{f_{L_1}}{f_{L_2}}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{A}{f_{L_1}^2}[\alpha^2 - 1] = \frac{A}{f_{L_1}^2} \times 0.6469$$

变换上式

$$\frac{A}{f_{L_1}^2} = 1.54573\Delta\tau$$

$$\tau_{L_1} = \tau_{GDL_1} - 1.54573\Delta\tau \tag{11}$$

上式中 τ_{L_1} 为 L_1 波段上已修正的信号传播时延，$\Delta\tau$ 为双频未修正的信号传播时延差，如果用伪距测量表示其公式为

$$\rho'_{L_1} = \rho_{L_1} + 1.54573(\rho_{L_1} - \rho_{L_2}) \tag{12}$$

上式 ρ'_{L_1} 为已经过电离层延迟改正的 L_1 波段的伪距值，ρ_{L_1}、ρ_{L_2} 为接收机输出的未修正的伪距值，$\rho_{L_1} - \rho_{L_2}$ 为双频伪距差。

就多普勒测量误差来说

$$\Delta f = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1.34}{f} \times 10^{-7}\frac{d(\mathrm{TEC})}{dt} \tag{13}$$

式中 TEC 表示积分的总电子计数，利用双频测量可得

$$\Delta f_{L_2} - \Delta f_{L_1} = 1.34 \times 10^{-7}\left[\frac{f_{L_1} - f_{L_2}}{f_{L_1}f_{L_2}}\right]\frac{d(\mathrm{TEC})}{dt}$$

$$= \Delta f_{L_1}\left[\frac{f_{L_1} - f_{L_2}}{f_{L_2}}\right]$$

$$= \Delta f_{L_1}[\alpha - 1]$$

$$= \Delta f_{L_1} \times 0.283$$

变换上式

$$\Delta f_{L_1} = 3.5294[\Delta f_{L_2} - \Delta f_{L_1}] \tag{14}$$

式中 $\Delta f_{L_2} - \Delta f_{L_1}$ 为所测量的双频多普勒之差，利用双频接收，电离层折射改正后其残差达 1—3 米。

4. 对流层折射

对流层折射是大气状态和卫星仰角的函数，而与卫星发射的频率无关，有关折射改正的数学模式在论文[1]，[2]中作了详细分析，在此我们推荐采用 Hopfield-Willmann 公式，

在使用公式时注意伪距测量和多普勒测量的区别，分别采用距离改正和距离差改正，经过对流层折射改正后其残差可达 1 米。我们认为： 用于 Transit 卫星导航系统所推导的对流层折射改正模式都可推广到 GPS，因此合理选择数学模式十分重要。

5. 多路径影响

多路径影响起因于多路径反射和不规则干扰，这样歪曲信号特征，引起伪距测量误差，其误差量级与天线位置、测站的地面状况以及附近地物地貌有关，对 P 码来说，最大可达 10 米(对 C/A 码可达百米)，若加注意可达 1 米或更小。

6. 接收机噪声和量化误差

a. 伪距测量的接收机噪声和量化误差

根据计算测量噪声的均方根差为

$$\sigma_P = 1.025 \text{ 米}\ (1\sigma)$$

$$\sigma_{C/A} = 10.5 \text{ 米}\ (1\sigma)$$

伪距测量可量化到 PN 码间隔的 1/64，即

$$\text{码间隔大小} = \frac{\text{光速}}{\text{码钟速率}} \tag{15}$$

对 P 码来说，码间隔为

$$\frac{3\times10^8 \text{ 米/秒}}{10.23\times10^6 \text{ 比特/秒}} = 29.32 \text{ 米}$$

对 C/A 码来说为

$$\frac{3\times10^8 \text{ 米/秒}}{1.023\times10^6 \text{ 比特/秒}} = 293.2 \text{ 米}$$

$$P \text{ 码的量化大小} = \frac{29.32}{64} = 0.46 \text{ 米}$$

$$C/A \text{ 码的量化大小} = \frac{293.2}{64} = 4.6 \text{ 米}$$

现列于表 2。

表 2

因 子	P 码	C/A 码
码钟速率	10.23 兆比特/秒	1.023 兆比特/秒
码间隔大小	29.32 米	293.2 米
量化大小	0.46 米	4.6 米
量化误差 (1σ)	0.266 米	2.66 米

b. 伪距差测量的接收机噪声和量化误差

在限定时间间隔内，对 L_1, L_2 波段的周期计数以进行伪距差（亦称多普勒频移）测量，其相位测量噪声的均方根差为

σ_{ϕ_1} = 0.44 厘米　λ_1 = 19 厘米（L_1 波段的波长）

σ_{ϕ_2} = 0.56 厘米　λ_2 = 24.5 厘米（L_2 波段的波长）

伪距差测量噪声是相位噪声的$\sqrt{2}$倍，即

$\sigma_{\Delta R_1}$ = 0.62 厘米，　λ_1 = 19 厘米

$\sigma_{\Delta R_2}$ = 0.80 厘米，　λ_2 = 24.5 厘米

其量化大小为载波波长的 1/64，其值如表 3。

表 3

因　　子	L_1	L_2
频率	1575.42 兆赫	1227.6 兆赫
波长	19 厘米	24.5 厘米
量化大小	3.2毫米	3.8 毫米
量化误差 (1σ)	2.5毫米	3.1 毫米

由表 3 数据表明，伪距差测量是非常精确的，因此一般军用接收机中，同时可作伪距测量和多普勒频移测量。

综合上述误差来源，伪距测量单次测量误差统计如表 4 所示。

表 4

误　差　来　源	相当于距离误差(以米计)
星历误差	2
卫星钟预测误差	2
电离层折射（双频 / 改正后）	小于 1
对流层折射(改正后)	1
多路径影响	2—10
接收机噪声和偏差	2
单次测量的均方根差 (1σ)	4.1—10.6

一般来说，P 码的定位误差为 4—5 米，利用单频 C/A 码其定位误差可达 30 米左右。

四、GPS 定位原理

双频 GPS 接收机可以利用码跟踪环电路测定伪距，又可利用锁相环电路测定多普勒频移（军用）。就伪距测量而言，其定位原理是根据 GPS 电文所给出的卫星钟改正参数、时标和卫星轨道根数，并将伪距测定值进行各项误差修正，在开机的几分钟内，连续观测四颗以上卫星，建立四个以上的距离方程式，可以求解四个待定值即测站三维地心坐标和本机钟钟差，由于一组观测时间极短，故对本机振荡器稳定度并不苛求，在解算中把本机钟钟差视为不变的常差，现分节阐述。

1. 把卫星轨道坐标系换算至地心坐标系

首先采用 WGS 72 系统的地球万有引力常数(包括了地球的大气质量)为

$$\mu = 3.986008 \times 10^{14} \text{米}^3/\text{秒}^2$$

WGS72 系统的地球自转速率为

$$\dot{\Omega}_e = 7.292115147 \times 10^{-5} \text{弧度/秒}$$

根据电文数据块 II 所给的轨道根数,可以计算为

$A = (\sqrt{A})^2$ 半长轴

$n_0 = \sqrt{\dfrac{\mu}{A^3}}$ 平角速

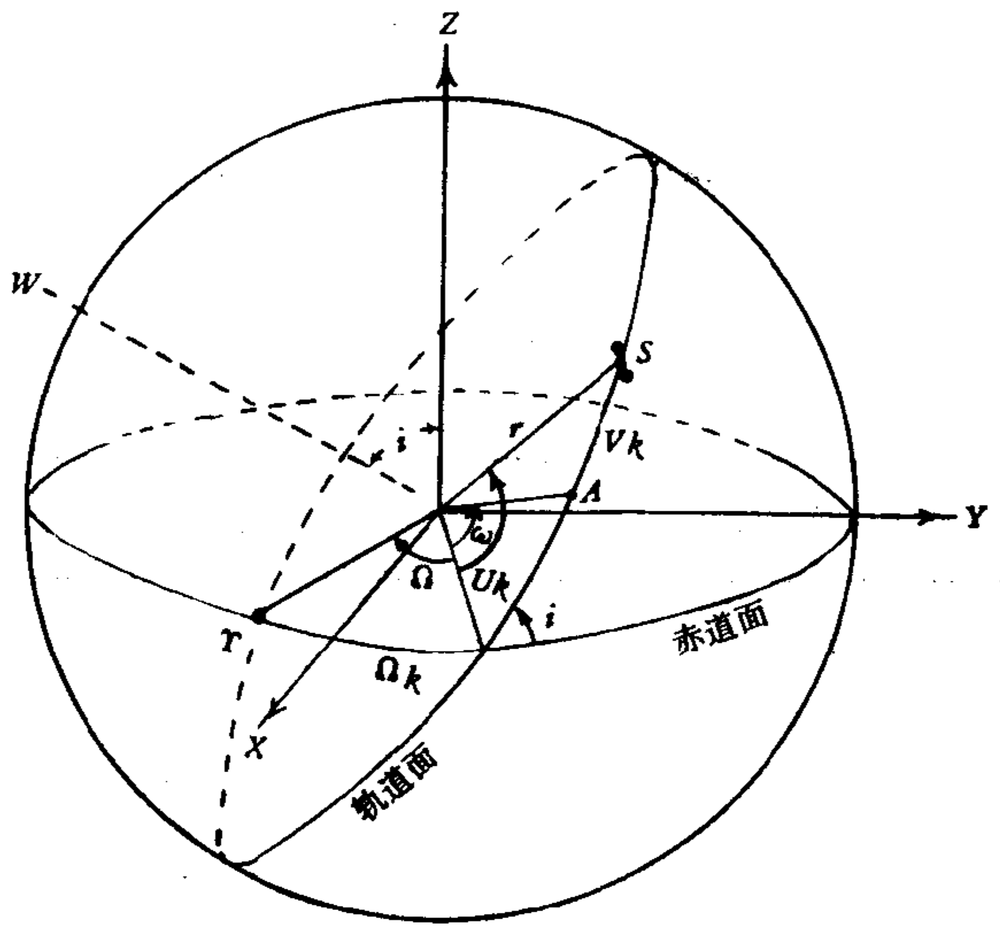


图 3

$t_K = t - t_{0c}$ 从历元起始的时差 (16)

$n = n_0 + \Delta n$ 已改正的平角速 (17)

$M_k = M_0 + nt_K$ 平近点角 (18)

$M_k = E_k - e \sin E_k$ E_k 为偏近点角,该式为偏近点角开普勒方程 (19)

$\cos v_k = (\cos E_k - e)/(1 - e\cos E_k)$ (20)

$\sin v_k = \sqrt{1 - e^2}\ \sin E_k/(1 - e\cos E_k)$ } 真近点角 (21)

$\phi_K = v_k + \omega$ 升交角距 (22)

二阶谐函数摄动改正为

$\delta u_K = C_{us} \sin 2\phi_K + C_{uc} \cos 2\phi_K$ 升交角距改正 (23)

$\delta r_K = C_{rc} \cos 2\phi_K + C_{rs} \sin 2\phi_K$ 半径改正 (24)

$\delta i_K = C_{ic} \cos 2\phi_K + C_{is} \sin 2\phi_K$ 倾角改正 (25)

经过摄动改正后的升交角距为

$$u_K = \phi_K + \delta u_K \tag{26}$$

半径为

$$r_K = A(1 - e\cos E_K) + \delta r_K \tag{27}$$

倾角为

$$i_K = i_0 + \delta i_K \tag{28}$$

卫星在轨道平面上的位置为

$$X'_k = r_K \cos u_K \tag{29}$$

$$Y'_k = r_K \sin u_K \tag{30}$$

$$Z'_k = 0 \tag{31}$$

已改正的升交点经度为

$$\Omega_K = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \Omega_e)t_k - \dot{\Omega}_e t_{0e} \tag{32}$$

其次，把轨道坐标系转换成地心坐标系，以 ON 为轴旋转 $-i$ 角，再以 Z 为轴旋转 $-\Omega_K$ 角，则

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{地心坐标系}} = \mathrm{III}(-\Omega_K)I(-i)\begin{bmatrix} X'_k \\ Y'_k \\ Z'_k \end{bmatrix}_{\text{轨道坐标系}}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\Omega_K & -\sin\Omega_K\cos i & \sin\Omega_K\sin i \\ \sin\Omega_K & \cos\Omega_K\cos i & -\cos\Omega_K\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X'_k \\ Y'_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega_K X'_k & -\sin\Omega_K\cos i Y'_k \\ \sin\Omega_K X'_k & +\cos\Omega_K\cos i Y'_k \\ & \sin i Y'_k \end{bmatrix} \tag{33}$$

2. 距离方程式及其解

伪距规定为

$$\rho_i = D_i + c\Delta t_{Ai} + c(\Delta t_u - \Delta t_{si}) \tag{34}$$

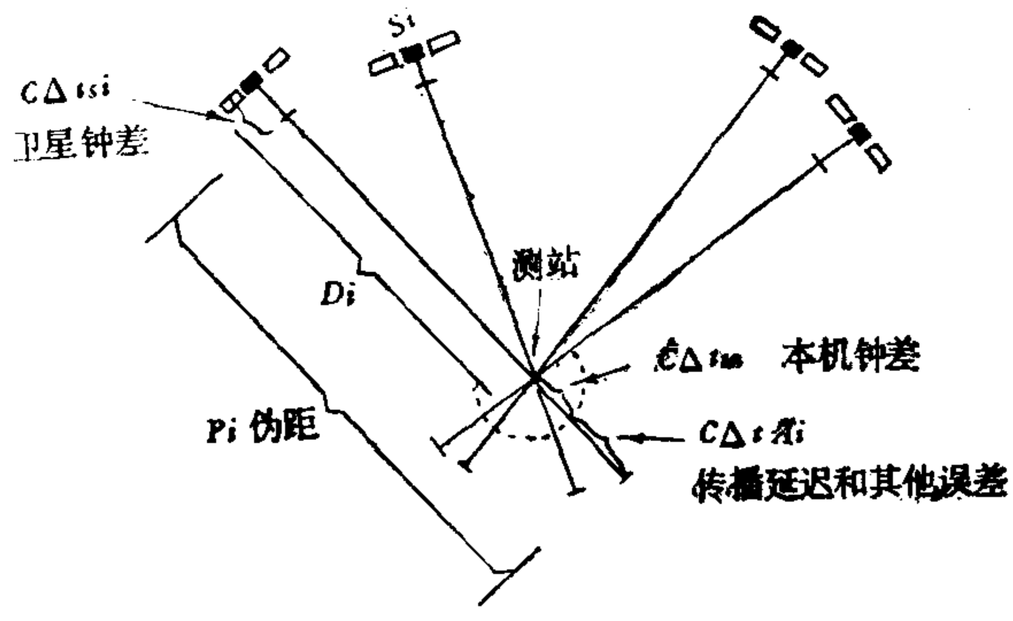


图 4 伪距

式中 ρ_i 为接收机所测定的卫星天线相位中心到测站之间的伪距，D_i 为卫星到测站之间的真实距离，c 为光速，Δt_{si} 为相对于 GPS 标准时间的卫星钟 i 的钟差（电文给出），它相当于距离误差为 $c\Delta t_{si} = B_i$，Δt_u 为相对于 GPS 标准时间的本机钟钟差，他相当于距离误差为 $c\Delta t_u = B_u$，该值是待定值，在定位解算中视为常差，Δt_{Ai} 为传播延迟和其他误差，可改正或削弱，下面引用矢量矩阵代数实行 GPS 定位解。

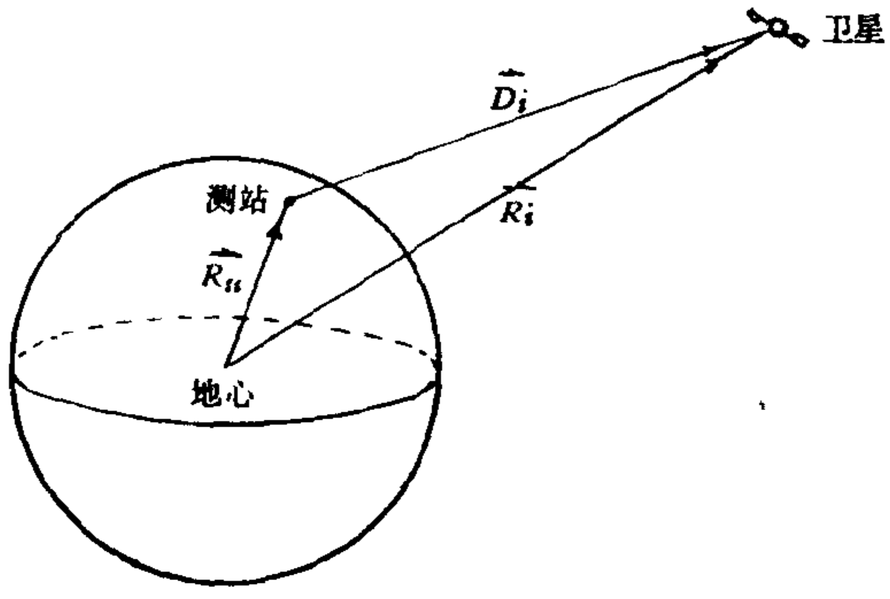


图 5

从图 6 中可以看出

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{R}_i - \mathbf{D}_i \tag{35}$$

式中 $\mathbf{R}_u$ 为地心到测站的矢量，$\mathbf{D}_i$ 为测站到卫星 i 的矢量，$\mathbf{R}_i$ 为地心到卫星 i 的矢量，i 必须大于或等于 4。测站的地心坐标为 $R_u \triangleq (R_{u1}, R_{u2}, R_{u3})^T$，该值为待定值，卫星的地心坐标为 $R_i \triangleq (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3})^T$，（为了推导方便没有用 x、y、z），矢量 $\mathbf{D}_i^*$ 为经过卫星钟钟差、传播延迟等误差改正后的伪距值。

令

$\mathbf{e}_i$ 为测站到卫星的单位矢量，$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{D}_i = D_i$，则公式(35)变成

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}_u = \mathbf{e}_i\mathbf{R}_i - D_i \tag{36}$$

根据公式(34)可得

$$D_i = \rho_i - B_u - B_i \tag{37}$$

(37)式代入(36)式

$$\mathbf{e}_i\mathbf{R}_u - B_u = \mathbf{e}_i\mathbf{R}_i + B_i - \rho_i \tag{38}$$

公式(38)为基本距离方程式。

设

$\underset{(4\times1)}{\bar{X}_u} \triangleq |R_{u1}, R_{u2}, R_{u3}, -B_u|^T$ 为四个待定值，

$$\underset{(n\times1)}{G_u} \triangleq \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{vmatrix} \qquad \underset{(n\times4n)}{A_u} \triangleq \begin{vmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0\cdots0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0\cdots0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3\cdots0 \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & 0\cdots\Gamma_n \end{vmatrix}$$

这里

$$\Gamma_i \triangleq (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, 1)$$
$$0 \triangleq (0, 0, 0, 0)$$
$$e_{ij} = (R_{ij} - R_{uj})/[(R_i - R_u)^T(R_i - R_u)]^{1/2}$$
$$j = 1, 2, 3$$

e_{ij} 为单位矢量 $\mathbf{e}_i$ 在三轴上的分量，亦是测站到卫星的方向余弦。

卫星三维坐标和卫星钟钟差已知量矩阵为

$$\underset{(4n\times 1)}{\bar{S}} \triangleq |R_{11}, R_{12}, R_{13}, B_1, R_{21}, R_{22}, R_{23}, B_2 \cdots R_{n1}, R_{n2}, R_{n3}, B_n|^T$$

伪距观测值矩阵为

$$\underset{(n\times 1)}{\bar{\rho}} \triangleq |\rho_1, \rho_2, \rho_3 \cdots \rho_n|^T$$

观测几颗卫星，则公式(38)可用下列矩阵表示并对 X_u 求解

$$\underset{(n\times 4)}{G_u}\ \underset{(4\times 1)}{\bar{X}_u} = \underset{(n\times 4n)}{A_u}\ \underset{(4n\times 1)}{\bar{S}} - \underset{(n\times 1)}{\bar{\rho}} \tag{39}$$

按最小二乘法解，在公式(39)两边同乘以 G_u^T，再求逆即

$$G_u^T G_u \bar{X}_u = G_u^T(A_u \bar{S} - \bar{\rho})$$

两边同乘以 $(G_u^T G_u)^{-1}$ 得

$$\bar{X}_u = (G_u^T G_u)^{-1} G_u^T (A_u \bar{S} - \bar{\rho}) \tag{40}$$

公式(40)就是 $\bar{X}_u$ 所要求的解，必须注意 G_u 和 A_u 是由 e_{ij} 所组成的，该值是基于测站坐标的概略估计所产生的 e_{ij} 的初值，因此公式(40)要求迭代解算。

3. GPS 的精度评定

测距误差与所选择的四颗以上卫星的几何图形相结合可以评定 GPS 的定位精度。卫星的空间分布的几何图形效应可用精度的几何扩散因子来表示，即：

PDOP——三维定位（x, y, z）的精度扩散因子，

HDOP——平面二维定位（x, y）的精度扩散因子，

UDOP——垂直一维定位（z）的精度扩散因子，

TDOP——本机钟差等效于距离误差的时间（t）的精度扩散因子。

$\mathrm{GDOP} = \sqrt{(\mathrm{PDOP})^2 + (\mathrm{TDOP})^2}$ 为三维定位和本机钟差的综合精度的几何扩散因子，上述因子乘以伪距误差（一般为 3.6—6.3 米），可以相应得到三维、二维、一维、本机钟差相应的距离误差以及定位的综合精度。如果 GDOP 因子较小，则表示所选择的卫星空间分布几何图形较好，四颗以上卫星合理排列分布，即一颗卫星在测站天顶，其他三颗卫星互隔 120°，仰角在地平线以上，这样三维坐标和时间测定误差较小。

GPS 公式的推导如下：

根据公式(40)

$$\bar{X}_u = (G_u^T G_u)^{-1} G_u^T (A_u \bar{S} - \bar{\rho})$$

$\bar{X}_u$ 的协方差矩阵为

$$\mathrm{Cov}\delta \bar{X}_u = (G_u^T G_u)^{-1} G_u^T \mathrm{Cov}\delta(A_u \bar{S} - \bar{\rho}) \cdot [(G_u^T G_u)^{-1} G_u^T]^T \tag{41}$$

如果 $\mathrm{Cov}\delta(A_u \bar{S} - \bar{\rho})$ 表示测量误差并精确已知，则在公式(41)中，通过建立 $\mathrm{Cov}\delta(A_u \bar{S}-$

$\bar{\rho}$) 为单位矩阵 (I) 来计算 GDOP，公式(41)可变为

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\delta\bar{X}_u &= (G_u{}^TG_u)^{-1}G_u{}^T\mathrm{I}[G_u(G_u{}^TG_u)^{-1}] \\ &= (G_u{}^TG_u)^{-1}G_u{}^TG_u(G_u{}^TG_u)^{-1} \\ &= (G_u{}^TG_u)^{-1} \end{aligned} \tag{42}$$

$\mathrm{Cov}\delta(A_u\bar{S}-\bar{\rho})$ 主要反映伪距测量的误差统计(参见表 4) 一般为 4—5 米，而 G_u 仅仅反映了系统的几何图形。假定 $\mathrm{Cov}\delta(A_u\bar{S}-\bar{\rho})=\mathrm{I}$，则几何图形效应由此可以确定，若使距离误差等于 1，并有零均值，则由这个假定就可使上述关系归一化，这意味着距离误差是相等和独立的。$\mathrm{Cov}\delta\bar{X}_u$ 为

$$(G_u{}^TG_u)^{-1}=\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{xt} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} & \sigma_{yt} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 & \sigma_{zt} \\ \sigma_{tx} & \sigma_{ty} & \sigma_{tz} & \sigma_t^2 \end{bmatrix} \tag{43}$$

式中对角线值是所估算的每一轴上的测站位置和本机钟钟差的方差，GDOP 因子定义为

$$\mathrm{HDOP}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2} \tag{44}$$

$$\mathrm{VDOP}=\sigma_z \tag{45}$$

$$\mathrm{PDOP}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2} \tag{46}$$

$$\mathrm{TDOP}=\sigma_t \tag{47}$$

$$\mathrm{GDOP}=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+\sigma_t^2} \tag{48}$$

于是，GDOP 因子乘以距离测量误差，即可得到相应测站位置误差和本机钟时间误差的估算。

五、小　结

全球定位系统与 Transit 导航系统相比，具有很大的优越性，其一速度快，GPS 卫星多，在几分钟内可连续观测 4 颗以上卫星，无需等待观测时间，定位速度快，因此单点法定位适用于高速运载器(飞机、导弹、近地卫星)的实时定位和大地定位。其二精度高，如果采用多组 (每组观测 4 颗卫星) 长时间连续观测，则可提高定位精度，根据 GPS 第一阶段试验表明，将几小时多组取平均，其绝对定位精度很快达到 1 米左右，由于绝对定位精度受到卫星轨道不准确性所限制，24 小时后连续观测其定位精度的改善是十分缓慢的，如果采用相对观测，其精度提高很快，Anderle[4,5] 指出： 8 小时观测其相对定位精度可达 40 厘米，24 小时内观测其相对精度可达 20 厘米。如果利用两台以上接收机，边长为几百公里构成 GPS 观测网进行相对定位，在短时间内 (3—5 天) 其相对精度有可能达到 10 厘米以下，因此引用传测法 (Translocation) 对 GPS 十分有利，因为传测法要求两站间严格同时观测，按上述想法边短观测数量多，剔除不同步或不符合观测纲要的数据外，尚保留足够数量的同步观测数据，这点是 Transit 系统望尘莫及的。其三共同性，GPS 与 Transit 系统都属于卫星导航系统，在研究 Transit 系统时所考虑的误差来源、观测纲要、传播延迟等数学模式都可酌情用于 GPS 之中，这样大大缩短研究 GPS 工作的进程，可以

预计，80 年代后期 GPS 将被国际卫星大地测量和现代无线电导航学者普遍研究和应用。

参 考 文 献

[1] 周江文：多普勒观测网的数学处理，测量与地球物理集刊，第3号，科学出版社，1981年.

[2] 宋文尧：多普勒观测的误差分析，测量与地球物理集刊，第3号，科学出版社，1981年.

[3] Parkinson, B. W., The Global Positioning System, (NAVSTAR), *Bulletin Geodsique*, **53**, 2. (1979), 89—108.

[4] Anderle, R. J., Accuracy of Geodetic Solutions Based on Doppler Measurements of the NAVSTAR Global Positioning System Satellite, *Bulletin Geodesique*, **53**, 2, (1979), 109—116.

[5] Anderle, R. J., Advanced Satellite Systems and Their Applications, Prepared for presentation at XVII General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics, Camberra, Australia, December, 1979.

[6] Dew, R. E., Review of the NAVSTAR Global Positioning System. Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. 22—26 January, 1979, 1089—1110.

[7] Jorgensen. P. S., The Short-Term Quality of NAVSTAR Tracking Data, Proceedings of the Second International Geodetic Symposium On Satellite Doppler Positioning 22—26 January, 1979, 1153—1174.

[8] Lassiter, E M. et al., The Operational Status of NAVSTAR/GPS, *The Journal of Navigation*, **30**, 1, 1977.

[9] Parkinson. B. W., Principle of Operation of NAVSTAR and System Chracteristics, *Navigation*, **25**, 2, 1978.

[10] Spilker, J. J., GPS Signal Structure and performance Characteristics. *Navigation*, **25**, 2, 1978, 121—132.

[11] Van Dierendonck, A. T. et al., The GPS Navigation Message, *Navigation*, **25**, 2, 1978, 147—165.

POINT POSITIONING CONCEPT USING GLOBAL POSITIONING SYSTEM (NAVSTAR)

Song Wenyao

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the signal characteristics, navigation message structure, error source analysis, measurement concept of point positioning and accuracy computation of the basic technigues of GPS are discussed. The possibilities of application of relevant technigues and mathematical model of the Transit system to GPS are explored and the developing vistas are looked forward.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

GPS 信息的相关接收

王 广 运

摘　要

本文探讨了 GPS 信息相关接收的几个问题。其中包括微弱信号的接收，伪随机码的产生和特性，以及相关接收及其同步。最后根据叙述的一般原理探讨了 GPS 信息的接收。

GPS（全球定位系统）是一种正在发展中的全天候、高精度、快速实时定位的卫星导航系统。它具有覆盖范围宽、信号可靠性高、抗干扰能力强、定位精度高、操作方便和便于使用的优点。据估计，全套系统投入使用后，将大大改善大地测量的手段，对于大地测量定位，研究地极运动和地球自转以及有关地球动力学的研究有极大价值。同时还可以接收 GPS 信号作为人造射电源，进行独立站射电干涉测量。

GPS 正处于研制阶段，具体内容目前知道的还不多。本文根据近代通信技术的理论和实践，探讨了 GPS 讯息相关接收的几个问题。

一、GPS 工作原理

GPS 由三部分组成，即卫星、地面控制部分和用户接收机。

卫星部分是由 24 颗卫星组成，均匀分布在三个轨道平面上[1]。每个轨道平面上均匀分布着 8 颗卫星。轨道倾角 63°，高度 20000 公里，轨道平面相互夹角为 120°。卫星绕地球的运转周期为 12 小时。这样，观测者在几分钟内可以同时接收来自 6 颗（在赤道区）—11 颗（在两极区）卫星所发射的信号。卫星的心脏是一台铯原子钟，其基频为 10.23 兆赫，稳定度达 10^{-12}。GPS 卫星采用两种频率发播。

$L_1 = 10.23 \times 154 = 1575.42$ 兆赫，载有 P 码和 C/A 码的二进制伪随机噪音序列。

$L_2 = 10.23 \times 120 = 1227.6$ 兆赫，只载有 P 码或 C/A 码。

P 码的调制速率为 10.23 兆比特/秒，码的持续时间（码长）为一星期，即每星期六夜晚，星期日子夜的格林威治平时为 P 码的初始时间。C/A 码长为 1 毫秒，其调制速率为 1.023 兆比特/秒。利用 P 码进行精密测量，利用 C/A 码可做快速捕捉和低精度测量。

地面控制部分由主控制站、监视站和注入站组成。它的工作程序为：由遥控监视站连续接收 GPS 信息，将测距数据、气象数据及卫星状态信息一齐发射给主控站。在主控站上进行电离层、对流层传播延迟修正和相对论效应等改正，提供卫星的位置、速度、光压所引起的加速度以及相对于 GPS 标准时间的卫星钟频偏等，将所得数据编成电文，由注

1）目前已更改为由 18 颗卫星组成。

入站注入卫星存储器系统中去。

用户部分包括天线、接收机、计算机及终端设备。GPS 接收机接收卫星信号，利用测量信号到达的时间，测量出伪距和伪距变化率。由此可以求解出 7 个量，即三维坐标、三维速度和本机钟差。

二、弱信号的接收

从 GPS 卫星发射的信号，其信号电流密度：L_1 频道为 155 分贝瓦/米^2，相当于 5.5×10^{-14} 瓦/米^2，L_2 频道为 158 分贝瓦/米^2，相当于 3.4×10^{-14} 瓦/米^2。这较之天空背景噪音，是相当微弱的。在观测 GPS 卫星时，能同时观测到 6—11 颗卫星信号。这些信号的载频是相同的，编码不一样。对某一颗卫星而言，其余的卫星信号就成为同频干扰源。这样以来，微弱的有用信号淹没在强烈的噪音之中。因此提出了弱信号的接收问题。

在近代通信理论中，当信噪比小于 1 或更低时，采用了扩展频谱和相关接收技术，来实现弱信号的接收。这一技术，在近十几年来发展迅速，已在通信、导航和测量系统中日益得到广泛的重视和应用。接收 GPS 信号要利用这一技术。

根据信息通信的香农公式，信道容量为：

$$c = B\lg_2\left(1+\frac{S}{N}\right), \tag{1}$$

式中

c——信道容量，相当于信息速率(比特/秒)；

B——信道带宽；

N——噪音功率；

S——信号功率。

从公式(1)看出，为要保持一定的信息容量，如果有较高的信噪比，带宽要求可以窄一些，如果信噪比很低，只有增大带宽，才能满足要求。

下面分析利用扩频技术抑制噪音的能力。

GPS 信息是随机二进制序列。图 1 示出某几位码元，设每位码元周期为 T_1 秒，振幅为 $\pm A$。因为是随机函数，$+A$，$-A$ 出现的概率相同。

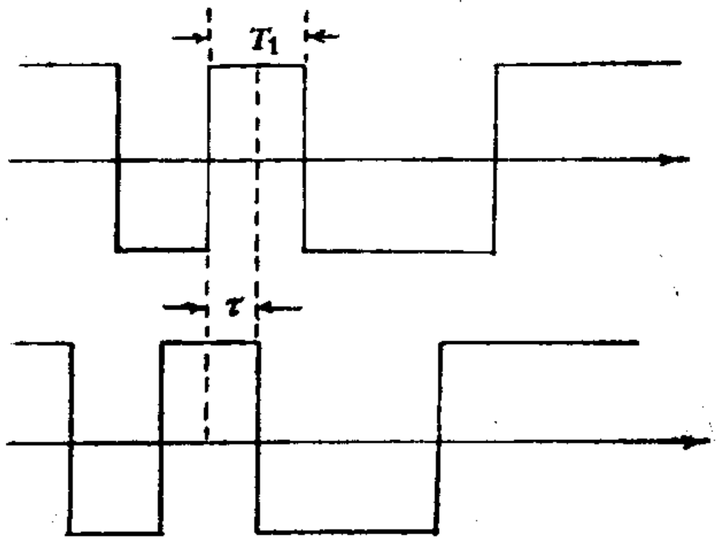


图 1　随机序列波形

从图 1 看出，当 $|\tau| = T_1$ 时，$f(t)\cdot f(t+\tau)$ 的平均值为零。当 $|\tau| < T_1$ 时，此乘积在一码元的平均值取决于阴影面积的大小。

由相关函数定义知

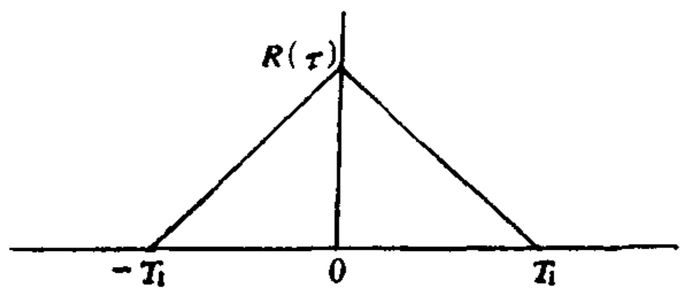
$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f(t)\cdot f(t+\tau)dt。 \tag{2}$$

在我们分析的这种情况下，相关函数为：

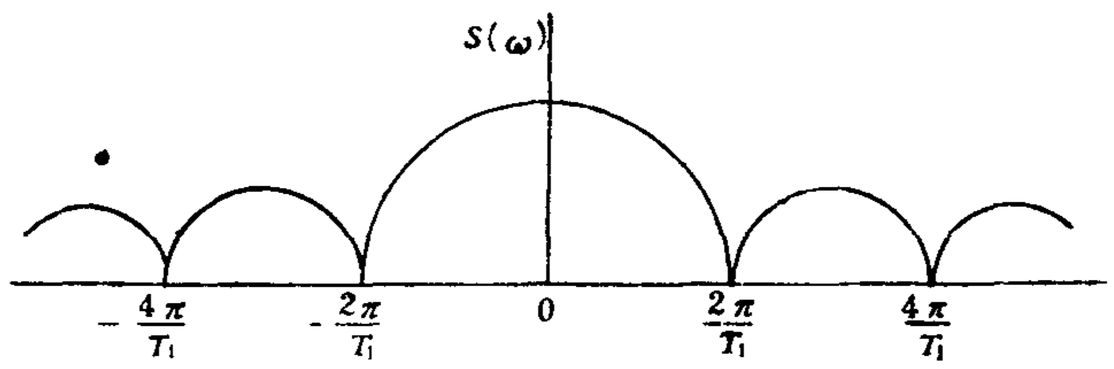
$$R(\tau)=\begin{cases}0 & \text{当 } \tau = T_1\\ \dfrac{A^2}{T_1}(T_1-|\tau|) & \text{当 } |\tau|<T_1\end{cases} \tag{3}$$

对相关函数进行傅里叶变换，求出其功率谱为：

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=A^2T_1\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T_1}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_1}{2}\right)} \tag{4}$$



(a) 自相关函数



(b) 功率谱

图 2　随机序列的自相关函数和功率谱

图 2 示出随机序列的自相关函数和功率谱图。

由于随机码具有周期性，其功率谱为线性离散谱。假定接收系统与发射系统的所有信号已准确位同步，发射码和本地码也保持群同步。发射信号被接收机接收，经过相关变频后，信号的带宽"去扩展"而恢复为窄的信码带宽 b，而噪音由于和本地码不相关，变频后仍为宽带信号。我们计算噪音落入中放窄带内的部分功率 p' 为

$$p'=S(0)\cdot b,\ (b \text{ 为中放带宽}) \tag{5}$$

而在 $\tau=0$ 时的功率谱为

$$S(0)=A^2T_1 \tag{6}$$

于是得到

$$p'=A^2T_1b=\frac{b}{R_c}A^2 \tag{7}$$

式中，$R_c=\dfrac{1}{T_1}$——扩展码速。

我们知道，A^2 原来就是噪音在输入端的功率，现用 p 表示，则式(7)可以写成：

$$p' = \frac{b}{R_c} \cdot p \tag{8}$$

式中

p——噪音在接收机输入端的功率；

p'——噪音在接收机中放输出端的功率。

GPS 的码速为 10.23 兆比特/秒，如果接收机中放选用 100 千赫时，此时输出的噪音只有输入的百分之一，而有用的信号将大于噪音。这就实现了微弱信号的接收。

三、伪随机码的产生和特性

在 GPS 中，为了提供精确时标，辨别和分离不同的卫星信号，克服多径效应和干扰，使用了伪随机码调制技术。

伪随机码亦称伪噪音码（PRN），它具有高斯噪音的特性，具有良好的相关特性。产生伪随机码的方法有好几种，但最常用的是 m 序列，即最长线性反馈移位寄存器序列。

为了说明起见，我们示出一个由四级反馈移位寄存器组成的 m 序列。假设初始状态为 $(a_3, a_2, a_1, a_0) = (1, 0, 0, 0)$，则在每移一位时，由 a_3 和 a_0 模 2 相加，产生新的输入 $a_3 \oplus a_0$，使状态变为 (1, 1, 0, 0)。这样移位 15 次，又回到初始状态。于是输出端产生一个伪随机码。

0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1

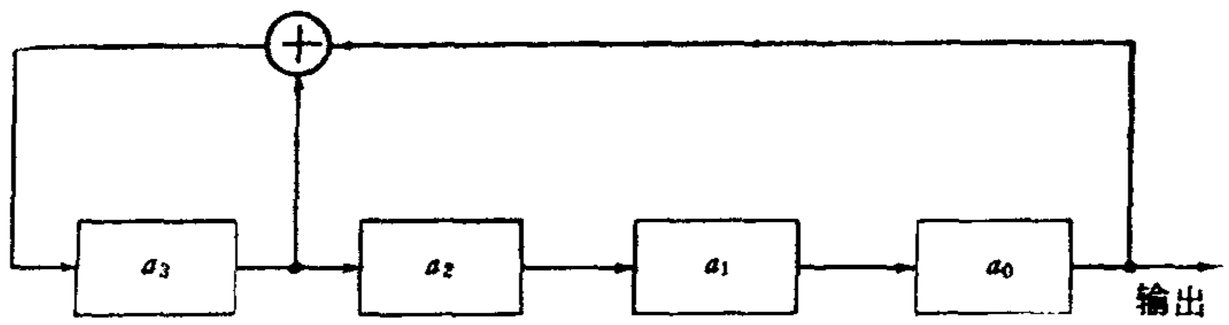


图 3　4 级 m 序列的产生

一个 n 级 m 序列，其周期长度为 $2^n - 1$。但是一个 n 级移位寄存器，从何处进行反馈，才能构成一个 m 序列，这是一个非常复杂的问题。已经证明，一个反馈移位寄存器产生 m 序列的充分和必要条件是：反馈移位寄存器的特征多项式是本原多项式。而本原多项式 $f(x)$ 必须满足下列条件：

(1) $f(x)$ 为既约的；

(2) $f(x)$ 可整除 $(x^m + 1)$，$m = 2^n - 1$；

(3) $f(x)$ 除不尽 $(x^q + 1)$，$q < m$。

根据求出的本原多项式，就可很方便地求出 n 级的 m 序列。

m 序列有下列性质：

(1) 均衡性　在一个周期中，“1”与“0”的数目基本相等，“1”比“0”的数目多一个。这是不允许存在全“0”状态。

(2) 游程分布　在序列中相同的码元连在一起称为一个游程。一般说来，长度为

1 的游程占游程总数的 1/2，长度为 2 的占 1/4，……。连“1”的游程和连“0”的游程各占一半。

（3）移位相加特性　一个 m 序列 m_p 与其经过任意次延迟移位产生的另一个序列 m_r 模 2 相加，得到的仍是 m_p 的某次延迟位 m 序列 m_s，即

$$m_p \oplus m_r = m_s \tag{9}$$

（4）自相关函数　根据自相关函数的定义，我们求得 m 序列的自相关函数：

$$R(j) = \frac{A - D}{A + D} = \frac{A - D}{m} \tag{10}$$

式中

A——m 序列与其 j 次移位序列一个周期中对应元素相同的数目；

D——m 序列与其 j 次移位序列一个周期中对应元素不同的数目；

m——m 序列的周期。

根据以上 m 序列的特性，其自相关函数为：

$$R(j) = \begin{cases} 1 & \text{当 } j = 0 \\ -\dfrac{1}{m} & \text{当 } j = 1,2,3\cdots m-1 \end{cases} \tag{11}$$

我们将 m 序列的自相关函数示于图 4。

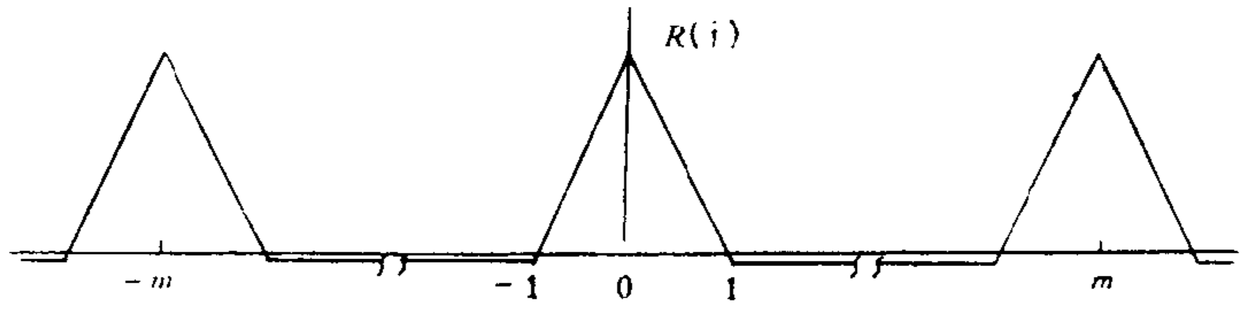


图 4　m 序列的自相关函数

由上述看出，m 序列的自相关函数只有两种取值$\left(1 \text{ 或 } -\frac{1}{m}\right)$。这一特性非常重要，对实现相关接收十分方便。这是人们常常把 m 序列用于伪随机码的重要原因之一。

（5）伪噪音特性　如果我们对一正态分布的高斯噪音取样，记做“+”或“−”，并将每次取样按次序排成序列，便得到一个随机噪音码。十分巧合，在出现的概率、游程分布、自相关函数等特性上，m 序列与其十分相似。所以我们将 m 序列称为伪噪音序列，是一种能人为产生的噪音序列。

GPS 采用了 $n = 48$ 级的 m 序列，经计算周期长度为 $2^{48}-1$，约 267 天。但在实际应用中，并没有采用最长序列。

四、扩频接收技术

当接收机完成群同步和位同步并转入跟踪状态后，就可以对信号进行相关接收。

我们采用符号：$D(t)$为数据码，$P(t)$为伪随机码，ω为载频。在发射端，先将 $D(t)$ 与 $P(t)$ 进行模 2 相加，然后对载频进行相移键控（PSK）调制。当伪随机码的周期很长时，$D(t)\cdot P(t)$ 是一个 $D(t)$ 被 $P(t)$ 扩展了的频谱信号。发射的信号为：

$$S(t)=\sqrt{2I}\,D(t)\cdot P(t)\sin(\omega t+\phi) \tag{12}$$

在接收天线上，除了有用信号 $S(t)$ 外，还存在着无用信号，即：

$$S(t)+\sum_{i=1}^{n}S_i'(t)+n(t)+J'(t) \tag{13}$$

式中，$\sum_{i=1}^{n}S_i'(t)$ 为其他目标源，例如 GPS 中其他几个不观测卫星发射的信号，称为邻站干扰，$n(t)$ 为噪音干扰，$J'(t)$ 为其他干扰。

在接收机里，将本地伪随机码与接收信号相乘。考虑到 $P(t)\cdot P(t)=1$，接收到的信号为：

$$\sqrt{2I}\,D(t)\sin(\omega t+\phi)+\left[\sum_{i=1}^{n}S_i'(t)+n(t)+J'(t)\right]P(t) \tag{14}$$

从式(14)看出，第一项为接收到的有用信号，其中已不包括伪随机码，只有数据 $D(t)$ 对载频的 PSK 调制信号，可以用一般解调方法解出数据信息码。式中的后三项：邻站信号干扰、噪音干扰和其他干扰，因与 $P(t)$ 相乘，仍是一宽带信号。采用带通滤波器，使有用信号通过，滤除掉其他干扰信号。这时，干扰信号远小于有用信号。这种搜索、同步、相乘、滤波的过程，就是对接收信号进行相关处理。

图 5 示出了扩频信号的形成和相关接收的波形图。从图上很清楚看到这一相关接收过程。

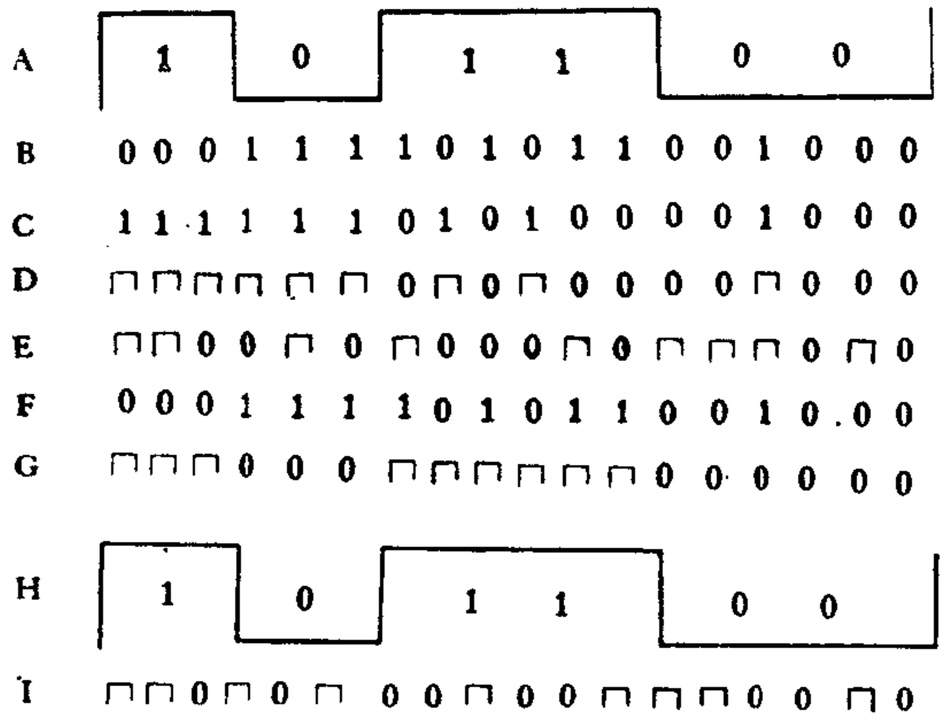


图 5 扩频信号的形成和相关接收

A. 数据信息码 $D(t)$；　B. 伪随机码 $P(t)$；
C. $D(t)\oplus P(t)$；　D. 调制载波相位 $S(t)$；
E. 干扰信号 $S'(t)$；　F. 本地随机码 $P(t)$；
G. 相关后信号；　H. 解调后的信号；
I. 相关后的干扰

五、GPS 信息结构和接收

上面我们分析了相关接收的一般技术问题。本节我们叙述这些技术在 GPS 信息接收中的应用。

1. 卫星发射信息

卫星上装有铷频标，振荡频率为 10.23 兆赫，卫星发射的载频信号是由此频标经 154 和 120 倍频而形成的。它们是：$L_1 = 10.23 \times 154 = 1575.42$ 兆赫，$L_2 = 10.23 \times 120 = 1227.6$ 兆赫。

同时由频标 10.23 兆赫输入 4 × 12 级反馈移位寄存器，形成伪随机码（图 6）。编码速率为 10.23 兆比特/秒，周期约 267 天，但此编码未用于最大长度。在形成编码过程中，插入一个(1—37)码位的延迟线路，每改变一位形成一个新的编码，使用于 24 颗卫星的辨别和跟踪。

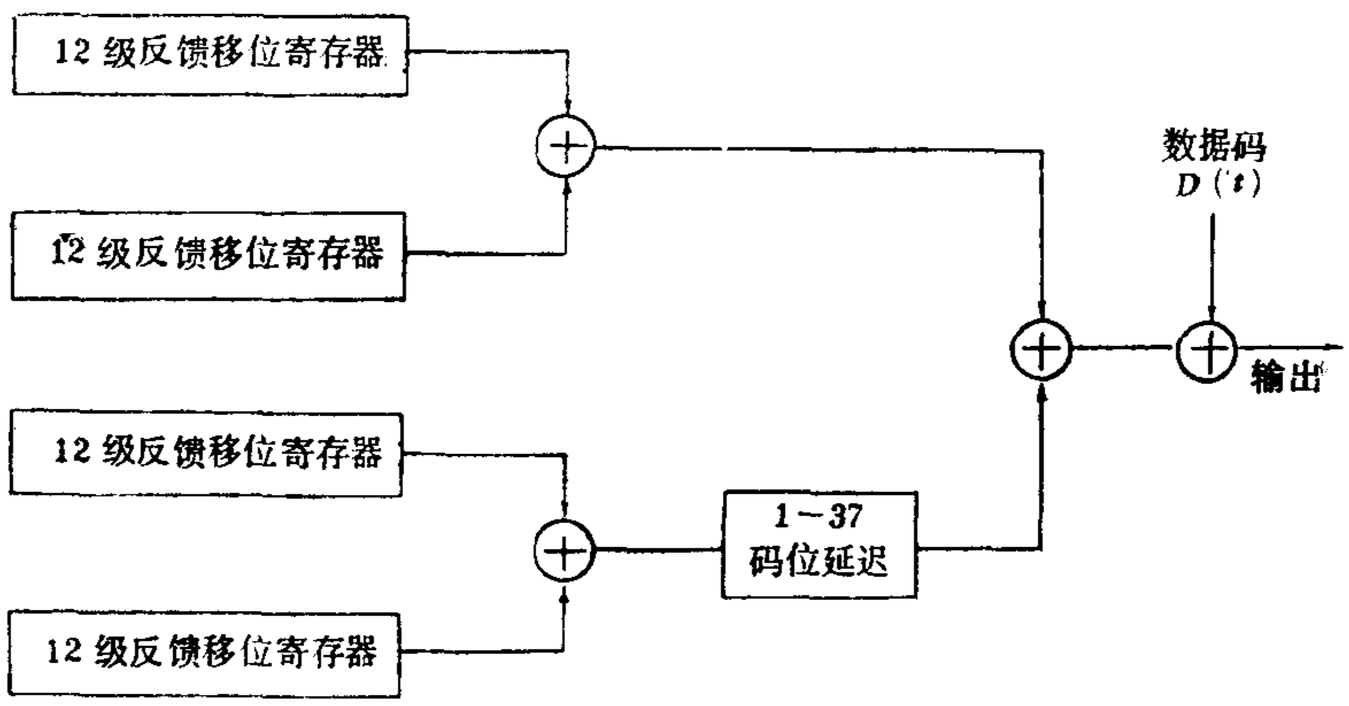


图 6　伪随机码的形成

卫星发射的 GPS 信号结构如下：

$$S_{L_{1i}}(t) = A_p P_i(t) D_i(t) \cos(\omega_1 t + \phi) + A_c G_1(t) D_i(t) \sin(\omega t + \phi) \tag{15}$$

式中

$S_{L_{1i}}(t)$——卫星上 L_1 频段发射的信息结构；

A_p——P 码的振幅；

$P_i(t)$——随时间变化的 P 码，调制速率为 10.23 兆赫。周期长 1 星期；

$D_i(t)$——数据电文编码，是数据的非零制与 50 比特/秒模 2 加的结果，每帧 1500 比特，持续时间 30 秒，分 6 个子帧；

ω_1——发射频率；

ϕ——载频的相角；

A_c——C/A 码的振幅；

$G_i(t)$——随时间变化的 C/A 码，码速 1.023 兆赫，周期长 1 毫秒，一组码有 1023 比特。

这种正交双边带调制，是由两个独立的基带波形对两个相互正交的载频进行抑制载频的双边带调制。在相同的带宽内形成正交频谱的办法来实现两路并行的数据信息传输，能提高传信率，是近代通信中常用的方法。

2. 搜索与捕获

根据现时卫星计划，应用了两个伪随机码。P 码的自相关脉冲宽度为 ±97.8 毫微秒。等效 ±29.3 米。P 码周期很长，在一天之内是不会重复的。本身不能做捕获用，以致第一次达到同步需要一个附加信息。为此，采用第二个伪随机码 C/A 码，其自相关脉冲宽度 ±978 毫微秒，相当于 ±293 米，周期长 1 毫秒，相当于用户到卫星的距离变化 300 公里就重复一次。C/A 码用于 P 码的捕获。仪器工作时，改变移位寄存器的输入频率，进行搜索，一旦捕获，立即转入跟踪状态。

3. 跟踪

本地反馈移位寄存器输出三组伪随机码(图 7)，一组是 P_0 码，是时间准确的 P 码；一

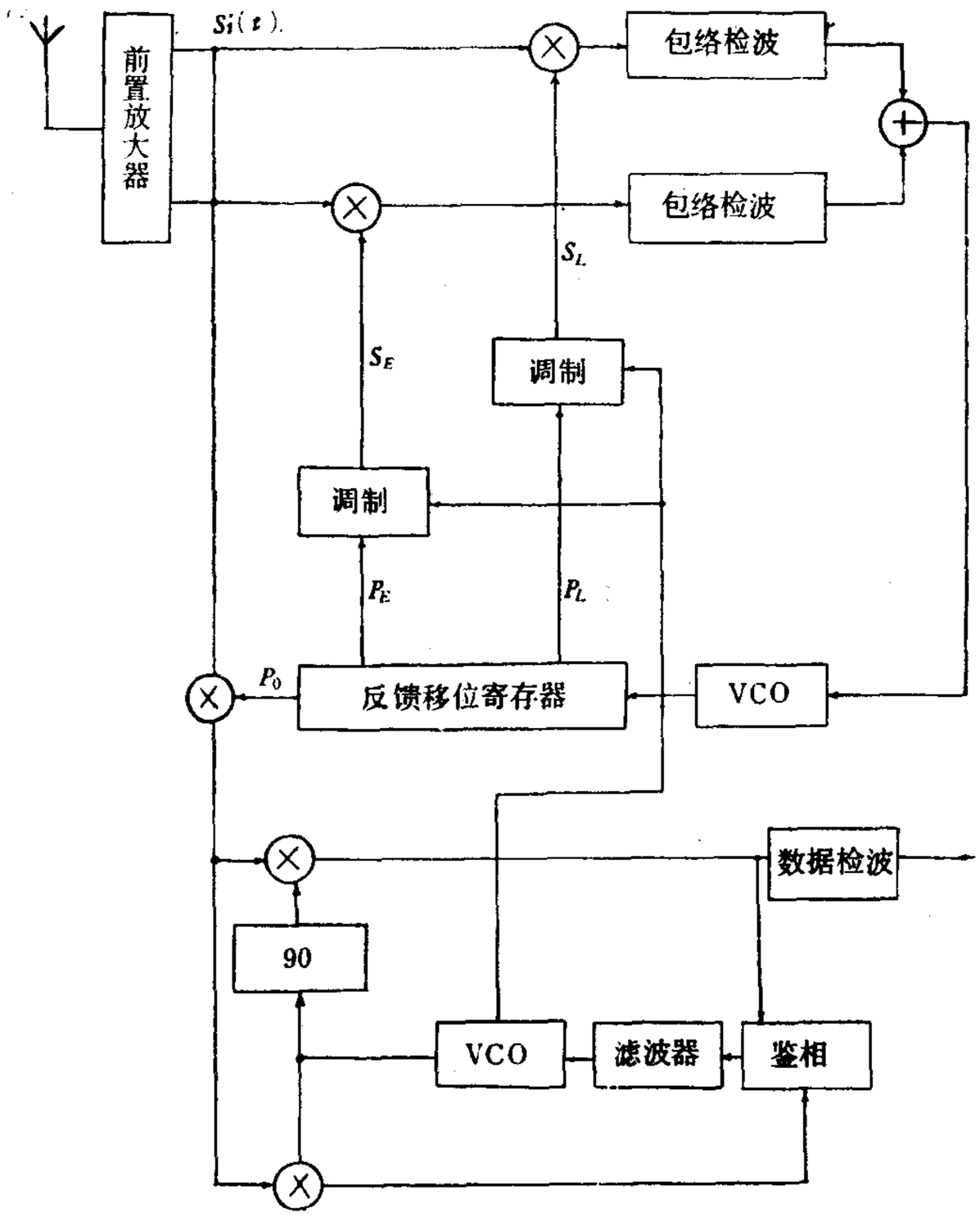


图 7　地面接收部分方块图

组为 P_E 码，时间比 P_0 提前一个比特；一组为 P_L 码，时间比 P_0 推后一个比特。用 P_E 和 P_L 去调制在锁相环中已同步的载频 L_1，形成 S_E 和 S_L 信号。S_E 和 S_L 与卫星信号 $S_1(t)$ 进行混频，然后进行包络检波，检出一个与伪随机序列相关内容成比例的电压。 这两路电压反相相加，形成双极性误差电压(图 8)，以控制压控振荡器，使始终同步在跟踪点上。这样，接收机的伪随机码实现了对卫星伪随机码的跟踪。

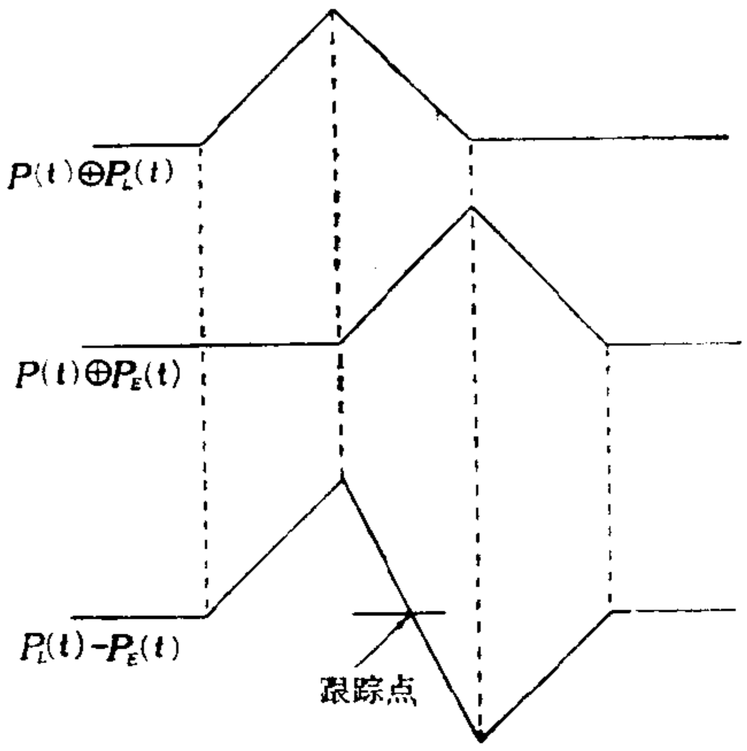


图 8 相关跟踪原理

4. 数据提取

数据提取是采取提取相干载频的方法。 亦称 Costas 法。

实现上面跟踪以后，P_0 码时间准确。输入信号 $S_1(t)$ 与 P 码进行相乘，恢复出载频信号来。载有数据码的载频信号 $D_i(t)\cos\omega_1 t$，分离为两路。一路乘以 $\cos(\omega_1 t+\theta)$，式中 θ 为相干载频与已调载频间的相位差，得到

$$D_i(t)\cos\omega_1 t\cos(\omega_1 t+\theta)$$
$$=\frac{1}{2}D_i(t)\{\cos\theta+\cos^2(\omega_1 t+\theta)\} \tag{16}$$

经过低通滤波后，其信号为

$$\frac{1}{2}D_i(t)\cos\theta \tag{17}$$

另一路，乘以 $\sin(\omega_1 t+\theta)$，得到

$$D_i(t)\cos\omega_1 t\cdot\sin(\omega_1 t+\theta)$$
$$=\frac{1}{2}D_i(t)\{\sin\theta+\sin(2\omega_1 t+\theta)\} \tag{18}$$

经过低通滤波后，其信号为

$$\frac{1}{2}D_i(t)\sin\theta \tag{19}$$

将式(17)与(19)鉴相相乘，其输出为

$$\frac{1}{2}D_i(t)\cos\theta\cdot\frac{1}{2}D_i(t)\sin\theta=\frac{1}{8}D_i^2(t)\sin 2\theta \tag{20}$$

因为相干载频与已调载频是同步的，所以相位差 θ 很小。鉴相输出经过滤波的电压去控制压控振荡器，以实现载频跟踪。同时，由第一路输出（式 17），经数据滤波后，便得到卫星电文的数据。

5. 伪距和伪距变化率的测量

由卫星发来的伪随机码与本地伪随机码所以存在着差值，是由于两者之间存在着钟差及卫星伪随机码传播了卫星到地面站一段距离而引起的。如果使两者的伪随机码保持严格同步，这两者的差值就是卫星到地面站的真距，事实上，两者存在着钟差。这时我们

称两伪随机码间的差值为伪距。

测量伪距不是直接测量的，而是测量发射信号到达的时间（TOA)。假定在初始位置是同步的，卫星到达一个新位置后，我们接收到的信号往后推迟了。在地面接收机中利用标准钟脉冲去移动 P 码发生器，使其同步。这时钟脉冲的个数就表征了 TOA，即伪距。在编码锁相环中应用了增量相位调制器（IPM)，实际上是一种数字锁相电路。每一步的量化是跟踪码波长的 1/64，因此 P 码的波长为 29.3 米，编码锁相环的量化单位为 0.46 米，即用 P 码测量伪距的精度为 0.46 米。

在接收机中，还利用载频锁相环来测定距离的相对变化 ΔR，即称为伪距变化率。在锁相环中，载频波长为 19 厘米，其量化精度为 0.3 厘米，这就是说以 0.3 厘米的误差测量伪距变化率。在 6 秒期间内有 0.3 厘米的量化，这相当于平均距离变化率为 0.5 毫米/秒。根据这一数据反推算过去，要求原子频标的稳定度达到 1.7×10^{-12}。目前使用的铷钟和铯钟，其稳定度为 10^{-11}，尚感不够，后期计划采用氢脉泽频标。

参 考 文 献

[1] Paul S. Jorgensen, The Short-term Quality of NAVSTAR Tracking Data, 2nd International Geodetic Synposion on Satellite Doppler Positioning, 1979.

[2] Bradford W. Parkinson, The Global Positioning System (NAVSTAR), *The Journal of the International Association of Geodesy*, **53**, No.2, 1979.

[3] 樊昌信等：通信原理，国防工业出版社，1980 年。

[4] 但森：相干通信技术，国防工业出版社，1977 年。

[5] M. 施瓦茨著，柴振明译：《信息传输，调制和噪声》，人民邮电出版社，1979 年。

CORRELATION RECEPTION OF THE GPS INFORMATION

Wang Guangyun

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, some problems about correlation receptions of the GPS information are discussed, including the reception of the weaker signal, the generation of pseudo random code and its proprety, and the correlation reception and synchronization. Finally, based on the discribed general principle, the reception of the GPS information is inquired.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

论 自 由 网 平 差*

陶 本 藻

摘　　要

本文在简述国外提出的五种主要解法的基础上，全面论述自由网平差的几个主要理论问题。这些问题是：自由网平差的统计性质，平差改正数的性质，参考系与最小范数条件，单位权方差与内精度等。

自由网平差又称秩亏网平差。近十年来国内外出现了大量研究文章，对这种平差方法的理论作了较充分的叙述，但全面论述其实质的文章还少见。

本文试图对该法几个主要理论问题进行探讨，以解剖其实质，指导应用。并着重说明与经典法平差结果及其性质的比较。

一、自由网平差原理和方法

网平差的函数模型和随机模型是：

$$E(l) = A\bar{X} \quad D(l) = \sigma_0^2 I \tag{1.1}$$

误差方程

$$\underset{n1}{V} = \underset{nu}{A}\underset{u1}{X} - \underset{n1}{l} \tag{1.2}$$

$R(A) = q < u$，最小二乘解

$$X = (A^T A)^- A^T l = N^- A^T l \tag{1.3}$$

不唯一，附加条件

$$t_r(Q_{xx}) = \min \tag{1.4}$$

可得唯一的最优解。因此，自由网平差遵循的原则是

$$V^T V = \min \tag{1.5}$$

$$X^T X = \min \tag{1.6}$$

(1.4)与(1.6)等价。

如为不等权观测，误差方程记成

$$V' = A'X - l', \quad D(l') = \sigma_0^2 P^{-1},$$

则可令

$$P = WW^T, \quad A = W^T A', \quad l = W^T l',$$

---

* 1981 年 9 月收稿。

$V = W^T V'$，而变换成模型(1.1)。

自由网平差的方法很多，但均遵循上述原则，方法简介如下：

(1) 广义逆法 (Mittermayer, 1971, [1])

用最小范数逆 $N_m^- = N(NN)^-$ 代(1.3)中 N^- 就能满足(1.6)，故有

$$X = N_m^- A^T l = N(NN)^- A^T l \tag{1.7}$$

因 N^+ 也是一个最小范数逆，故也有

$$X = N^+ A^T l = Q_{xx} A^T l \tag{1.8}$$

$$Q_{xx} = N(NN)^- N(NN)^- N = N^+ \tag{1.9}$$

(2) 附加条件法 (Mittermayer, 1972, [2])

对(1.2)中的 X 附加下列条件：

$$\underset{du}{S^T} X = 0 \quad (d = u - q) \tag{1.10}$$

按附有条件的间接平差得

$$\begin{pmatrix} N & S \\ S^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T l \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$K = 0$，解之得 X 与 Q_{xx}。

对于由 N 的 d 个零特征值对应的特征向量构成的特征矩阵 S，水准网中为

$$\underset{1u}{S^T} = (1 \ 1 \cdots 1), \tag{1.12}$$

测边网或边角网中为

$$\underset{3u}{S^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \cdots & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 \cdots & -y_m & x_m \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

式中 $u = 2m$。

(3) 直接解法 (Wolf, 1972, [3])

将(1.2)改写成

$$V = \underset{nq}{(A_1} \quad \underset{nd}{A_2}) \begin{pmatrix} \underset{q1}{X_1} \\ \underset{d1}{X_2} \end{pmatrix} - l \tag{1.14}$$

$R(A_1) = q$

$$V = A_1 X_1 - (l - A_2 X_2) \tag{1.15}$$

按(1.5)

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T (l - A_2 X_2) \\ X_2 &= X_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

附加

再按(1.6)，解得

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A_1^T A_1 (A_1^T A_1 A_1^T A_1 + A_1^T A_2 A_2^T A_1)^{-1} A_1^T l = \alpha l \\ X_2 &= A_2^T A_1 (A_1^T A_1 A_1^T A_1 + A_1^T A_2 A_2^T A_1)^{-1} A_1^T l = \beta l \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

及

$$Q_{x_1 x_1} = \alpha\alpha^T \quad Q_{x_2 x_2} = \beta\beta^T \quad Q_{x_1 x_2} = \alpha\beta^T \tag{1.18}$$

（4）伪观测值法（Pelzer，1974，[4]）

在(1.2)中附加由伪观测值 b 组成的观测方程

$$\underset{du}{B}\underset{u1}{X}=\underset{d1}{b} \tag{1.19}$$

B 满足：

$$BB^T=I \quad AB^T=0 \tag{1.20}$$

按(1.5)得

$$X=(A^TA+B^TB)^{-1}(A^Tl+B^Tb)=Q(A^Tl+B^Tb) \tag{1.21}$$

X 不唯一，按(1.6)得 $b=0$，$B=G^T$，G^T 是(1.10)中 S^T 的标准化特征矩阵，最后得

$$X=(A^TA+GG^T)^{-1}A^Tl \tag{1.22}$$

$$Q_{xx}=(A^TA+GG^T)^{-1}-GG^T \tag{1.23}$$

（5）消去条件法（Perelmoter，1979，[5]）

将(1.2)写成

$$\underset{n1}{V}=\underset{nq}{A_1}\underset{q1}{X_1}+\underset{nd}{A}\underset{d1}{X_2}-\underset{n1}{l} \tag{1.24}$$

将满足

$$\underset{ud}{A}\underset{d\alpha}{G}=0 \tag{1.25}$$

的 G 选择为

$$G=\begin{pmatrix}\underset{qd}{G_1}\\ \underset{d\alpha}{-I}\end{pmatrix}$$

与(1.10)相应的附加条件为

$$G_1^TX_1-X_2=0 \tag{1.26}$$

消去条件，$X_2=G_1^TX_1$，代入(1.24)即得

$$X_1=(\bar{A}^T\bar{A})^{-1}\bar{A}^Tl \tag{1.27}$$

$$\bar{A}=A_1+A_2G_1^T \tag{1.28}$$

$$Q_{x_1x_1}=(\bar{A}^T\bar{A})^{-1} \tag{1.29}$$

还有其他一些方法等等。

Mittermayer 在[2]中证明了方法 1 和方法 2 一致；Perelmuter 在[5]中证明了方法 3 与方法 1 一致；方法 4 是方法 2 的变形，方法 5 也与方法 2 类似，解法不同。它们都得出唯一相同的结果。

二、统计性质

由(1.7)得

$$E(X)=N_m^-A^TE(l)=N_m^-N\bar{X}\neq\bar{X} \tag{2.1}$$

即自由网平差参数估值有偏。

用 $l+\Delta$ 代(1.7)中的 l，得

$$\bar{X}=N_m^-A^T(l+\Delta) \tag{2.2}$$

令 $\Delta_x = \bar{X} - X$，则有

$$\Delta_x = N_m^- A^T \Delta \tag{2.3}$$

它是 $N\Delta_x = A^T\Delta$ 的最小范数解。而此方程的一般解为

$$\Delta_x = N_m^- A^T \Delta + (I - N_m^- N)M \tag{2.4}$$

M 为任意向量，误差平方和

$$\Delta_x^T \Delta_x = \Delta^T A (N_m^-)^T N_m^- A^T \Delta + M^T (I - N_m^- N)^T \cdot (I - N_m^- N) M \tag{2.5}$$

式中顾及了交叉乘积项为零。

按方差定义知

$$\sum_{i=1}^{u} D(X_i) = E(\Delta_{x_1}^2 + \cdots + \Delta_{x_u}^2) = E(\Delta_x^T \Delta_x) \tag{2.6}$$

求(2.5)数学期望得

$$E(\Delta_x^T \Delta_x) = E[\Delta^T A (N_m^-)^T N_m^- A^T \Delta] + M^T (I - N_m^- N)^T \cdot (I - N_m^- N) M \tag{2.7}$$

上式右边两项均非负定，只有当 $M = 0$ 时，(2.7)才取极小值，于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{u} D(X_i) &= E[\Delta^T A (N_m^-)^T N_m^- A^T \Delta] \\ &= E[t_r(\Delta^T A (N_m^-)^T N_m^- A^T \Delta)] \\ &= t_r[(N_m^-)^T N_m^- A^T E(\Delta\Delta^T) A] \\ &= \sigma_0^2 t_r[N(NN)^- N(NN)^- N] \\ &= \sigma_0^2 t_r(Q_{xx}) = \min \end{aligned} \tag{2.8}$$

即自由网平差参数估值方差最小。

由自由网平差求得的参数估值是一个最优有偏估值。

设未知参数 X 的线性函数为

$$Z = F^T X = F^T N_m^- A^T l \tag{2.9}$$

$$E(Z) = F^T N_m^- N_x^- = F^T \bar{X} \tag{2.10}$$

此式说明，若 Z 是无偏估值，必须有

$$F^T N_m^- N = F^T \tag{2.11}$$

或

$$F^T N(NN)^- N = F^T \tag{2.12}$$

满足(2.11)或(2.12)的 Z 是最优无偏估值，且唯一。

自由网中观测量的平差值

$$\bar{l} = l + V = AX \tag{2.13}$$

现证明 A 满足(2.12)即

$$AN(NN)^- N = A \tag{2.14}$$

左乘 $(NN)^- A^T$，得

$$(NN)^- NN(NN)^- N = (NN)^-$$

按广义逆性质 $NN(NN)^- N = N$，(2.14) 成立。

因此，在自由网中，一切观测量的平差值及其线性函数都是唯一的最优线性无偏估值。

特别地，在经典平差中，(2.1) 中 $N_m^- = N^{-1}$，$E(X) = \bar{X}$，用 $N_m^- = N^{-1}$ 代入同样可证得 $\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \min$，故参数估值都是最优无偏估值。

三、改正数 V 的性质

在 $V^TV = \min$ 条件下解误差方程(1.2)，可得 X 的一个特解为

$$X = N^-A^+l \tag{3.1}$$

代入(1.2)得

$$V = AN^-A^Tl - l = (AN^-A^T - I)l \tag{3.2}$$

虽 N^- 不唯一，但 AN^-A^T 是一个不变量。可见，不论最小二乘解 X 取何值，代入(1.2)，由(3.2)得出的 V 值不变。现附加条件

$$X^TX = \min \tag{3.3}$$

得

$$X = N_m^-A^Tl \tag{3.4}$$

代入(3.2)

$$V = (AN_m^-A^T - I)l$$

V 值不变。由此说明附加(3.3)对 V 值并没有影响。

在自由网平差中，未知参数近似值不同会得出不同的估值，但由平差理论可知，它并不影响改正数 V。

因此，在自由网平差中，改正数 V 唯一确定，是一个不变量，它受最小二乘条件制约。而所选的近似坐标系以及附加最小范数条件对改正数 V 并无影响。

将误差方程改写成

$$V = \underset{n\,q}{(A_1}\ \underset{n\,d}{A_2)}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - l \tag{3.5}$$

$R(A_1) = q$，A_1 为列满秩阵。X 的最小二乘解为

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^TA_1 & A_1^TA_2 \\ A_2^TA_1 & A_2^TA_2 \end{pmatrix}^- \begin{pmatrix} A_1^Tl \\ A_2^Tl \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

取

$$\begin{pmatrix} A_1^TA_1 & A_1^TA_2 \\ A_2^TA_1 & A_2^TA_2 \end{pmatrix}^- = \begin{pmatrix} (A_1^TA_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

式中 $R(A_1^TA_1) = q$，为非奇异方阵，代入(3.6)得

$$X_1 = (A_1^TA_1)^{-1}A_1^Tl \tag{3.7}$$

$$X_2 = 0 \tag{3.8}$$

这是一个最小二乘特解。

如果选定网中 d 个参数作为固定值，令固定值为这些参数近似值，不失一般性，则

$X_2 = 0$。由此列出的误差方程必为

$$V = A_1X_1 - l \tag{3.9}$$

最小二乘唯一解就是 (3.7)。

可见，经典平差法只是无固定数据自由网中一种最小二乘特解，它并不满足最小范数条件。但因为是一种最小二乘解，故求出的 V 必与自由网平差结果同。

因此，自由网平差中 V 是一个不变量，V^TV 也是不变量，且与经典平差法求得的结果相同。进而所求的平差值及其线性函数也与经典平差所得相应结果同。

四、参考系与最小范数条件

按最小二乘条件出发求得的 V，消除了网中各种几何条件的不符值，网形的相对最佳位置已经确定。但此时的网形浮动的。例如，水准网在垂直方向上可以升降，测边网或边角网在水平方向上可平移和旋转。如何在绝对位置上进行固定，算出各点的高程或坐标，需借助参考系进行网外配置。这种参考系的建立，是视实际需要而定的。

经典方法是固定网中的必要起始数据。建立这种参考系，一切计算就以此为基准。例如，网中的高程或坐标由此推算出来，评定的精度也相对于固定数据而言。

但在自由网中无起始数据可用，就需建立另一种参考系。这就是，在平差时，对各参数（如高程、坐标）确定一组近似值，这组近似值构成了一个参考系。然后通过最小范数条件对已确定好相对位置的网形进行外部配置，从而求出相对给定参考系的各参数的最优有偏估值。不同的参考系，虽然还是用最小范数条件，得出的参数估值却不会相同。但它们的差别有规律，可以互相换算。

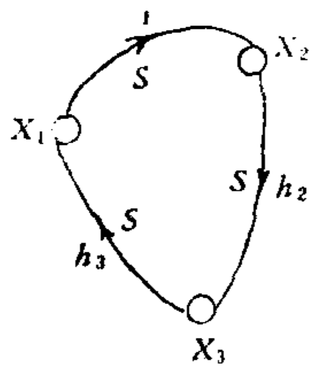


图 1

先看一个简单水准网的例子。

表 1 列数据说明，三种不同参考系平差高程，X 不同而 V 同。但各参考系间相应点平差高程只差一个常数。如 I 与 II，差 0.389，II 与 III 差 9.000 等。II 中各高程加上 0.389 就变成 I，III 中各高程加上 9.000 就变成 II。这种差别是参考系的差别。

表 1

($h_1 = 12.345$ 米　$h_2 = 3.478$ 米　$h_3 = -15.817$ 米)

	近似高程	X	平差高程	高差改正数
I	$H_1^0 = 0$ (米) $H_2^0 = 12.345$ $H_3^0 = 15.823$	$x_1 = 0.002$ $x_2 = 0$ $x_3 = -0.002$	$H_1 = 0.002$ $H_2 = 12.345$ $H_3 = 15.821$	$v_1 = -2$(毫米) $v_2 = -2$ $v_3 = -2$
II	0 12.000 15.000	−0.387 −0.044 +0.432	−0.387 11.956 15.432	−2 −2 −2
III	0 0 0	−9.387 +2.956 +6.432	−9.387 2.956 6.432	−2 −2 −2

取三种参考系中近似高程的平均值得：

I:9.389，II:9.000，III:0。

上述差数就是这些平均值之差。可见，参考系 I 是以网的重心高程 9.389 作为基准，II 是以网的重心高程 9.000 作为基准等等。这就是自由水准网中参考系的意义。

由(1.12)知，在水准网中，具有条件

$$S^TX = X_1 + X_2 + \cdots + X_u = 0,$$

亦即重心高程改正数为零，重心高程不变。这就是最小范数条件在网外配置上的意义。

对于测边网或边角网也类似，建立的近似坐标系就是确定了参考系。不同的参考系，所不同的是三个量：纵横坐标各一平移量和一个旋转量，它们之间关系可通过平移和转轴互相变换而统一。

由(1.13)知，在测边网或边角网中，具有条件

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = 0 \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = 0 \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} (-y_iX_i + x_iY_i) = 0 \tag{4.3}$$

式中 y_i，x_i 为 i 点近似坐标，$u = 2m$。

由(4.1)和(4.2)知，重心坐标改正数为零，由 (4.3) 知，以各点向经距离平方为权的向经方位角的带权平均数的改正数为零。亦即它们的参考系是以一点重心坐标作为带权平均数的向径方位角为该网的基准数据。各参考系所得平差坐标差别是上述参考系的差别。

因此，从上述看来，自由网平差与经典法平差在参考系上的几何意义是一致的。

五、单位权方差和内精度

单位权无偏方差公式为

$$\mu^2 = \frac{V^TV}{n-q} = \frac{V^TV}{n-(u-d)} \tag{5.1}$$

Koch 在文献[6]中已作了证明，现整理加工如下：

$$\begin{aligned} V^TV &= l^T(AN_m^-A^T - I)^T(AN_m^-A^T - I)l \\ &= l^T(AN^-A^T - I)^T(AN^-A^T - I)l \\ &= l^T(I - AN^-A^T)l \end{aligned} \tag{5.2}$$

因为

$$E(V^TV) = t_rD(V) + E^T(V)E(V) \tag{5.3}$$

$$D(V) = (AN^-A^T - I)D(l)(AN^-A^T - I)^T \tag{5.4}$$

故

$$E(V) = 0 \tag{5.5}$$

$$E(V^TV) = t_r(AN^-A^T - I)D(l)(AN^-A^T - I)^T$$
$$= t_r(I - AN^-A^T)D(l) \tag{5.6}$$

由于

$$(I - AN^-A^T)(I - AN^-A^T) = I - AN^-A^T,$$

$I - AN^-A^T$ 为幂等阵，其秩必等于其迹，故有

$$R(I - AN^-A^T) = t_r(I - AN^-A^T) = t_r(I) - t_r(NN^-)$$
$$= n - q \tag{5.7}$$

式中顾及了 $t_r(NN^-) = R(NN^-) = q$。代入(5.6)

$$E(V^TV) = (n - q)\sigma_0^2 \tag{5.8}$$

可见(5.1)为 σ_0^2 的无偏估值。

因 V^TV 为不变量，μ^2 由经典法平差或自由网平差结果必然相同。

自由网平差中参数估值 X 的精度公式为：

$$D(X) = \sigma_0^2 Q_{xx} = \sigma_0^2 N^+ \tag{5.9}$$

因 N^+ 唯一，Q_{xx} 和 $D(X)$ 唯一。但 Q_{xx} 的秩

$$R(Q_{xx}) = q < t \tag{5.10}$$

Q_{xx} 和 $D(X)$ 为奇异阵。

在经典平差中，由于固定了 d 个参数，Q_{xx} 是 q 阶满秩方阵，求得的 X 精度是相对固定参数的，它包含了固定数据和观测误差的联合影响。

而在自由网平差中，X 的精度并不受这种固定数据的影响，完全受观测误差影响，是一种内精度。但也类似经典平差法那样，其精度是相对所选定的参考系而言的。内精度还常用如下平均指标：

$$M = \mu\sqrt{t_r(Q_{xx})/u} \tag{5.11}$$

对于自由平面控制网，虽然 $D(X)$ 或 Q_{xx} 是奇异阵，但其中每一点平差坐标相应的子阵

$$Q_{ii} = \begin{pmatrix} Q_{X_iX_i} & Q_{X_iY_i} \\ Q_{Y_iX_i} & Q_{Y_iY_i} \end{pmatrix}$$

是非奇异阵，可作出确定的误差椭圆，但仍是内精度。网中任意两点，亦可作出确定的相对误差椭圆，计算相对精度。但用奇异阵 $D(X)$ 得不到 u 维椭球，其中出现 d 个零特征值，只能作出 q 维椭球，此表明其中 q 个参数估值相对其它 d 个固定参数的精度。

结　　果

(1) 无固定数据自由网平差的原则是

$$V^TV = \min \text{ 和 } X^TX = \min$$

前者决定网形的最佳相对位置，后者在给定参考系下作最佳（$t_rQ_{xx} = \min$）网外配置。因此，计算亦可分别进行。

(2) 自由网平差参数估值是最优有偏估值，是一种不可估量。不同参考系结果不同，

但可通过变换得到统一。平差值及其线性函数是最优无偏估值，是可估量。

（3）自由网平差中的改正数 V，平差值及其线性函数，以及单位权中误差，平差值及其函数的中误差都与经典平差结果相同。

（4）自由网平差的特点是能求任意参考系下的参数估值及其内精度。这些参数是指点的高程或坐标等，这在一般经典平差中是无法求出的。由于这种特点，在不要求绝对参考系情况下，又只需要内精度和参数估值情况下，这种方法得到应用，它避免了起始数据误差的影响。例如在变形观测，网形最优化设计等方面应用较为理想。它与经典法各有特点，相互不能代替，各有用途。

（5）秩亏自由网平差的提出，在平差理论上具有一定意义，它冲破了经典平差法的种种限制，推广了平差的思路，为进一步研究平差理论提供了一条途径。因此，是值得重视研究的课题之一。

参 考 文 献

[1] E. Mittermayer, Eine Verallgemeinerung der Methode der Klemsten Quadrate zur Ausgleichung Freier Netze. *Z. f. V.*, Heft 11, 1971.

[2] E. Mittermayer, Zur Ausgleichung Freier Netze, *Z. f. V.*, Heft 12, 1972.

[3] H. Wolf, Helmerts Lösung Zum Problem der Freien Netze mit singulärer Normalgleichungsmatrin, *Z. f. V.*, Heft 5, 1972.

[4] H. Pelzer, Zur Bchandlung Singulärer Ausgleichungsaufgaben, *Z. f. V.*, *Heft* 5, 11, 1974.

[5] A. Perelmuter, The Adjustment of free Nets s, ***AD*-4, 1979.**

[6] K. R. Koch, Parameterschätzung and Hypothesentests in Linearen Modellen, 1980.

ON ADJUSTMENT OF FREE NETS

Tao Benzao

(*Wuhan College of Geodesy, Photogrammetry and Cartography*)

Abstract

Some main theoretical Problems of adjustment of free net are totally discussed in this article on the basis of talking about five chief solutions abroad. These problems are as follows: Statistical character of adjustment of free net, quality of adjustment corrections, Reference system and condition of the minimal norm, variance of the weight unit and inner accurcy and so on.

第4号 测量与地球物理集刊 No. 4
1982年 ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA 1982

一等三角锁与二等网联合平差初步方案试算报告(一)

郗钦文 张 牙

摘 要

"一等三角锁与二等网联合平差初步方案"(以下简称"方案")一文提出了一个总平差方案,我们就一个并非十分理想的图形进行了试算。试算表明:"方案"较仅包括一等锁之天文-大地网平差方案为佳。文中以实际数例表明了"方案"之平差元素精度高于后者,尤其是以较高的精度确定了枢纽点之间的相对位置。"方案"中由于增加二等"对角带"所得到的收益是难以用增加观测或提高测角精度换取的。

根据试算结果,我们认为"方案"所述之总平差方案最适宜的是枢纽网先平差,而后固定枢纽图形,再如该文所述进行总平差。

本文也对枢纽网与枢纽图形之选择提出了原则性意见。

一、引 言

我国天文大地网的布设工作已基本完成,一些地区业已进行了局部平差,它对统一全国大地坐标系统和控制全国基本地形图的测绘工作起了重大作用。

近几年来,我国在研究天文大地网平差方面有了不少进展,提出了各种不同的平差方案和平差方法,而以方案为其总纲。

从许多文献的论证,我们知道,二等全面网的精度不是低于一等锁,而是要高一些,因此,总平差时应该充分利用二网之固有精度。二等网参加总平差,将会显著提高总平差之精度。

"一等三角锁与二等网联合平差初步方案"[1]一文提出了一个总平差方案: 除一等三角锁外, 还从二等网中划出"对角带"参加总平差, 此后固定某些点进行网平差。方案规定,为了最有效地减少接合未知数,在一等锁之交叉处设立枢纽网或枢纽图形。它包括一等起始边,由一二等三角点联合构成。在总平差中它们的坐标改正数相同。

为了进一步研究最适宜的枢纽网(或枢纽图形)大小,最外边和次外边之精度,两枢纽点之间的相对位置精度,二等对角带的作用以及平差方法,我们就一个并非十分理想的三角网进行了试算。它由一条一等横锁以及设立于其两端的枢纽网(枢纽图形)构成(图1)。

试算共分四部分(下文相应称每一部分为一方案)。

(1) 枢纽网与一等锁一并严密平差. 采用分区接合的办法, 枢纽网用间接观测平差

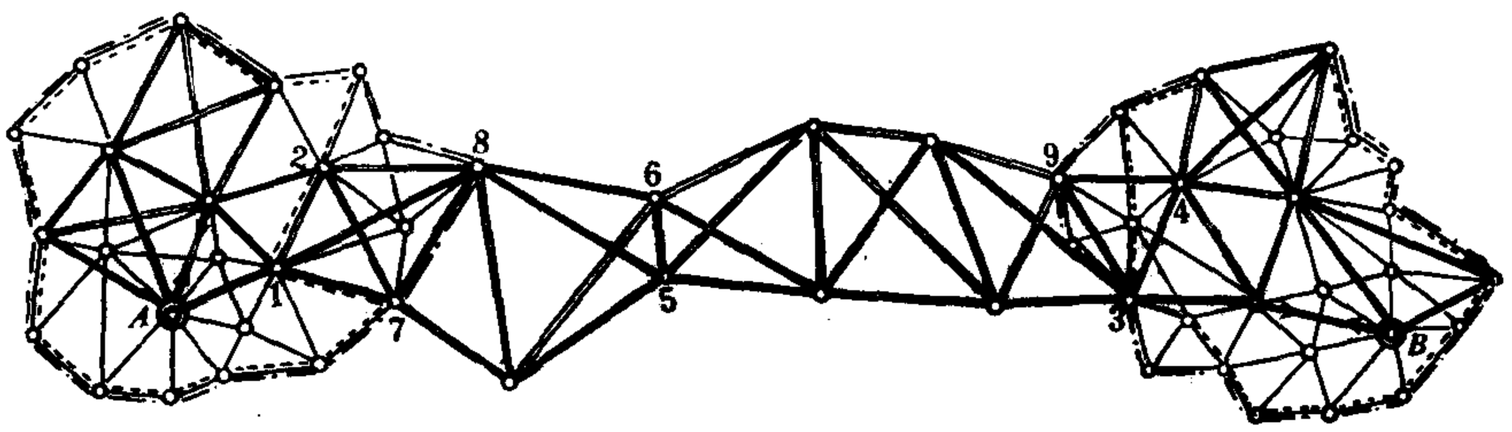


图 1

法，一等锁按有未知数的条件法平差（以图 1 中 7，8，3 和 9 点之定向角及坐标改正数作为接合未知数）。锁、网分别求出接合未知数的等价法方程式（间接观测平差中未知数的约化法方程式就是它们的等价法方程式；有未知数的条件平差中，未知数的约化法方程式则要反其符号才是它们的等价法方程式），把同一接合未知数的所有等价法方程式对应相加，就得到它们的最后法方程式。解出后分头代入各部分平差，求得全部平差值。

（2）枢纽网单独严密平差之后，固定枢纽图形（长度，方位元素）于 $S_{1,2}$ 及 $S_{3,4}$ 边之间插入一等三角锁。平差后三角点之坐标由一端之枢纽点（图 1 中 A 点）经枢纽图形及一等锁向他端传算。

（3）枢纽图形与一等锁一并严密平差，详见（1）。

（4）枢纽图形单独严密平差之后固定其长度及方位元素，仍于 $S_{1,2}$ 及 $S_{3,4}$ 之间插入一等三角锁，详见（2）。

二、几种不同方案结果之比较

第 1 方案和第 3 方案或者第 2 和第 4 方案相比较，平差后方向改正数都大致相同。其间最大差数分别为 0.″59 和 0.″61（在网之边缘方向上），大于 0.″1 者仅为总方向数的 15% 左右。

各方案中方向改正数正负号之分布亦属合理，两者数目大致相等。

由枢纽网、枢纽图形或者固定枢纽图形之插锁乃至后来由一等三角锁单独平差所求得之单位权中误差（以一等方向观测之权为 1）都在 ±0.″32－±0.″47 之间，而以后者为最大。

如果固定枢纽点 A（详见图 1），则 1，3 方案和 2，4 方案中枢纽点 B 的坐标之相互差数如表 1 所示。

同样，若固定枢纽点 A，则各方案的枢纽点 B 之相对位置图见图 2。

由表 1 或图 2 皆可看出，3，4 方案较之 1，2 方案都使枢纽点 B 之 y 坐标减小（注意我们选用的是横锁）。

表 1

比较方案	1—3	2—4
	米	米
Δx	−0.148	+0.069
Δy	+0.241	+0.252

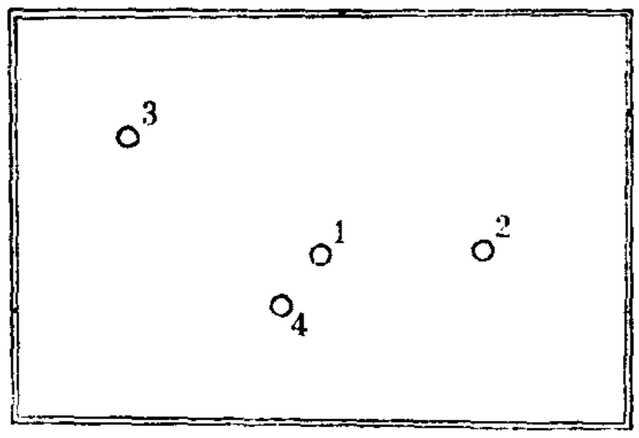


图 2

作为插锁的固定边 $S_{1,2}$ 和 $S_{3,4}$，在 1,3 和 2,4 方案中之差数列于下表：

表 2

	1—3	2—4
	米	米
$S_{1,2}$	+0.018	+0.025
$S_{3,4}$	+0.045	+0.043
对锁长之影响	+0.210	+0.249

分别按照它们的比例误差之平均值，计算其对锁长之影响，依次为 +0.210 米和 +0.249 米(列于表 2 中)。这个差数正好与表 1 之 Δy 值相当。可见这是 1,3 方案和 2,4 方案中枢纽网与枢纽图形包含观测数之多寡不同所致。2,4 方案是我们所要研究的主要对象，将择其佳者作为总平差方案。然而，究竟以孰为优，必须再来看看枢纽网和枢纽图形中同一接合边之长度及方位角精度(未计起始数据误差)，见表 3。

表 3

	$m_{S_{1,2}}$	$m_{\alpha_{1,2}}$	$m_{S_{3,4}}$	$m_{\alpha_{3,4}}$
枢纽网	±0.42 分米	±0″.36	±0.66 分米	±0″.36
枢纽图形	±0.42 分米	±0″.36	±0.86 分米	±0″.44

$S_{1,2}$ 离起始边较近，传算三角形较 $S_{3,4}$ 为少。因之，在枢纽图形与枢纽网中 $S_{1,2}$ 之长度精度相近(表中中误差相同)，而 $S_{3,4}$ 则相差较大。至于方向精度，则由于两者传算相同而相差不大。但总的来说，枢纽网之接合边精度较枢纽图形中同一接合边为高。

在枢纽网中次外边(图 1 中 $S_{1,2}$ 及 $S_{3,4}$) 之精度也较最外边为高(表 4)。

表 4

	枢纽网 A		枢纽网 B	
	m_S	m_α	m_S	m_α
最外边	±0.75 分米	±0″.48	±0.71 分米	±0″.43
次外边	±0.42 分米	±0″.36	±0.66 分米	±0″.36

综上所述，可见第 2 方案较之第 4 方案为佳，其中枢纽图形之精度较第 4 方案为高。因此，我们特别注意第 2 方案。

三、精 度 比 较

为了将第 2 方案与通用平差方案(仅包括一等锁之天文-大地网平差)比较，我们计算了它和一等锁单独平差后一些长度元素之精度 (比例误差)，并估计了起始数据误差之影响。

在第 2 方案中我们所遇到的平差值函数与一般不同，其中平差值不是属于同一平差系统(一部分属于枢纽网，一部分属于插入之锁段平差)。并且，作为插锁之起始数据又都是另一平差系统(枢纽网平差)之平差值函数，因此不能按一般方法求该函数之权倒数。就是在单锁平差中，我们也是并用了有未知数的条件法与间接观测平差，起始数据误差之计算也不能遵循范例，本文第(二)部分对此作了理论推导。

首先将未顾及起始数据误差所计算的第二方案和一等锁单独平差之后一些长度元素精度(比例误差)列表如下：

表 5

	锁长 S_{AB}	$S_{1,2}$	$S_{3,4}$	$S_{5,6}$
单锁平差	1:313000	1:339000	1:221000	1:185000
第二方案	1:395000	1:567000	1:414000	1:187000

然后，按本文第二部分所述之理论顾及起始数据误差之影响，进行了相应的计算（曾作某些简化)，其结果列于表 6：

表 6

	锁长 S_{AB}	$S_{1,2}$	$S_{3,4}$	$S_{5,6}$
单锁平差	1:275000	1:252000	1:196000	1:174000
第二方案	1:309000	1:299000	1:267000	1:175000

由表 5 及表 6 可以看出，虽然在第二方案中起始数据误差对 $S_{1,2}$ 及 $S_{3,4}$ 之影响较单锁平差显著，但总的来说，由第二方案所确定之各元素精度仍较通行方案为高。尤其是以

较高的精度确定了两枢纽点之间的相对位置。这是任何总平差方案所要求的。这第 2 方案正是“一等三角锁与二等网联合平差初步方案”一文所特别推荐的总平差方案。

四、二等对角带的作用

“一等三角锁与二等网联合平差初步方案”一文建议，总平差时，除一等锁外，还从二等网中划出“对角带”参加。为了进一步证明“对角带”的加强作用，并与现行方案比较，我们模拟实际情况计算了一个大小与标准一等锁环相同的四边形导线网和中点多边形导线网各点之误差椭圆元素，并假定观测了方位角及长度，其权是按一等锁和二等“对角带”的实际精度以及方位角与长度之影响相等的原则确定的。

今将计算结果（误差椭圆长半轴 E，短半轴 F 及点位全中误差 M）由图 3 表示之。

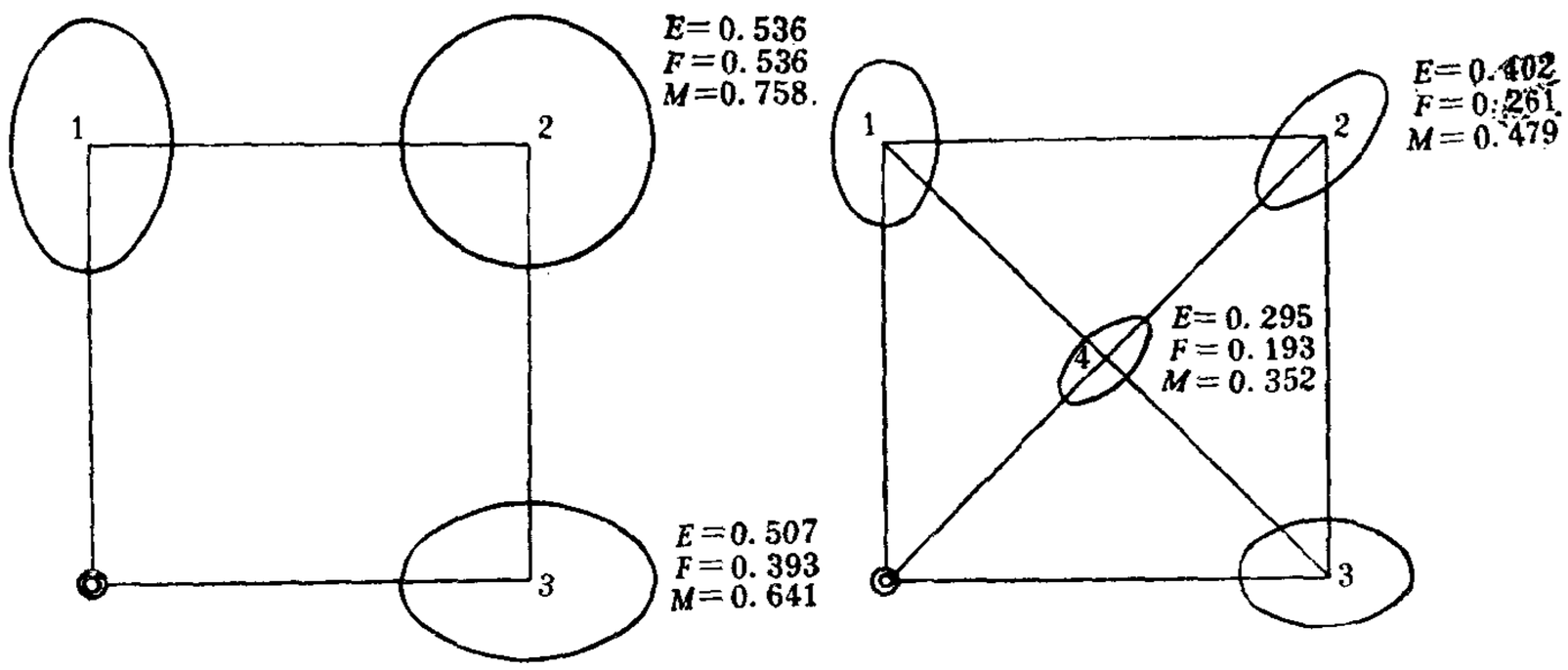


图 3

（单位：米）

可以看出，由于增加了“对角带”，使得各点误差椭圆长半轴之长度减小，最弱点位全中误差由 0.758 米缩小为 0.479 米（即缩小 1.6 倍）。如果设想改用增加观测或提高测角精度的办法换取同样收益，则观测必须增加到原来的 2.4 倍，测角精度必须提高 1.4 倍，即一等三角测量的测角中误差应由 0″.7 减小为 0″.45。这在目前是很难办到的。

五、结　论

我们认为，不论采用什么平差方案，大规模天文-大地网平差的作用必须而且只能是高精度地确定部分点之间的位置关系。总平差中除全部一等锁外加入二等“对角带”，则二等网之固有精度得以充分利用，同时也将提高全国范围内大地点之间的相对位置精度。设置枢纽图形旨在简化锁带之接合问题。诚然，枢纽图形先行平差而固定，较之同时平差会有轻微之损害，但从上面列举的数据可以证实，它较一等锁单独平差的精度仍有显著提高，亦即《方案》所推荐之总平差方案较仅包括一等锁之天文-大地网平差方案优越。尤其增加二等“对角带”后，以较现行方案为高的精度确定了枢纽点之间的相对位置（参看表 5,6 及图 3）。

我们的试验还仅仅是最简单而规模最小的，因为毕竟尚未包括二等“对角带”也未构成锁环。尽管如此，结论还是可以肯定的。

根据试算结果，我们认为“一等三角锁与二等网联合平差初步方案”中所述之总平差方案，最适宜的是枢纽网先行平差，而后固定枢纽图形，以使其具有更好的强度。然后，再如该文所述进行总平差。枢纽图形之选择应以基线网为中心并略呈圆形而尽可能小（最远之一等边基线之间不多于 2—3 个一等三角形）。原则上，枢纽图形之大小应不使锁带之间有公共观测，以减少接合未知数。即使不能完全如此，也应使公共观测尽量减少。枢纽网则比枢纽图形扩大一排三角点，扩大太多徒增工作量，而收益并不显著。

另外，在旧二网区加强枢纽网之观测也是可以考虑的。

参 考 文 献

[1] 周江文、张牙：一等三角锁与二等网联合平差初步方案，测绘学报，第 5 卷，第 2 期，科学出版社，1962 年，第 79—84 页。

TRIAL COMPUTATION REPORT OF THE PRELIMINARY SCHEME FOR THE COMBINED ADJUSTEMENT OF FIRST-ORDER TRIANGULATION CHAINS AND SECOND-ORDER NETWORKS (1)

Xi Qinwen Zhang Ya

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper of "Trial Computation Report of the Preliminary Scheme for the combined Adjustement of First-order Triangulation Chains and Second-order Networks" (In the following we call it "Scheme" for short), a general adjustment scheme has been put forward. We have tentatively calculated a figure which is not very ideal. The "scheme" is better than the adjustment program of astrogeodetic network including only 1st-order chains. The concrete instances in this paper demonstrate that the adjustment element accuracy of this "scheme" is higher than the latter, and especially it has determined the relative positions between the key points with higher accuracy. In the "scheme", the gains got by adding 2nd-order "diagonal zone" are difficult to exchange by incureasing observations and promoting the accuracy of measuring angles.

According to the calculated results, we consider that, the general adjustment program mentioned in this "scheme" is most suitable for prior key network adjustment and then for the key figures, and at last the general adjustment will be carried out as mentioned in this paper.

The authors' suggestions of principle about the selections of key networks and key figures have also been made.

第4号 测量与地球物理集刊 No. 4
1982年 ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA 1982

一等三角锁与二等网联合平差初步方案试算报告(二)

——几个理论问题

郗钦文

摘　　要

本文是"一等三角锁与二等网联合平差初步方案"试算报告之第二部分。文中运用"双括号"论述了试算中所涉及的几个理论问题:

(1) 有未知数的条件观测与间接观测的分区接合平差法以及顾及起始数据误差影响时平差值函数之中误差;

(2) 顾及起始数据误差时,不同平差系统的平差值函数之中误差。

前者可作为大规模分区平差中按不同方法平差的直接接合理论,函数中误差等一切计算皆可分区独立进行,然后联合;后者则可作为逐级布设的控制网按不同方法分别平差时,顾及起始数据误差,求平差值函数中误差之一般理论。文中仅导至两级,当然还可以推广到更多的级次。

一、引　　言

"一等三角锁与二等网联合平差初步方案"[1]试算中涉及了几个理论问题:带有未知数的条件观测与间接观测分区接合平差法及其平差值函数权倒数;分区接合平差中起始数据误差之影响;顾及起始数据误差时不同平差系统的平差值函数之中误差。鉴于问题具有普遍实践意义,本文将分别阐述其理论及公式推导。同时为了叙述简明,我们应用了新符号"双括号"。这方面的理论可参阅文献[2]及[3],本文限于篇幅,只在必要时说明符号意义,不再援引原著。

二、带有未知数的条件观测与间接观测分区接合平差法及其平差值函数权倒数

"一等三角锁与二等网联合平差初步方案"一文中提到总平差采用分区接合的办法,并且主张二等"对角带"采用间接观测平差,一等锁可用带有接合未知数(包括枢纽未知数)的条件平差。并用这两种方法的分区接合平差,在[5]中已有叙述,但不如直接按等价原理导出的理论明晰。后者可使分区平差单独进行,只需在分别求出接合未知数的等价

法方程式之后，各区对应相加，就得到最后的法方程式。为了系统地阐明这种接合平差法及其平差值函数权倒数的计算，下面我们将从带有未知数的条件平差原理出发，加以扼要叙述。

设三角网中间接观测平差部分之误差方程式的一般形式为

$$v' = a'x + b'y + c'z - l'$$

其中 y 和 z 为接合未知数。又设网中带有未知数的条件平差部分有如下之条件方程式

$$[av] + A_y y + A_z z = -w_a$$

$$[rv] + R_y y + R_z z = -w_r$$

采用符号 $(al) = -w_a$, $(rl) = -w_r$, $(aB) = A_y$, $(aC) = A_z$, $(rB) = R_y$ 以及 $(rC) = R_z$[2]，并将网中所有误差方程式亦视为带有未知数之条件。把所有条件方程式列于表 1，表下部虚线表示不符值在等号右方。

表 1

	k_α	k_ρ	k_a	k_r
v'_1	$+1$			
v'_n		$+1$		
v_1			a_1	r_1
v_n			a_n	r_n
x	$-a'_1$	$-a'_n$		
y	$-b'_1$	$-b'_n$	(aB)	(rB)
z	$-c'_1$	$-c'_n$	(aC)	(rC)
	$-l'_1$	$-l'_n$	(al)	(rl)

根据表 1 组成法方程式，见表 2。

表 2

(α)	(ρ)	(A)	(a)	(r)	(B)	(C)	(l)	(f)	(l^0_λ)
k_α	k_ρ	x	k_a	k_r	y	z			
$(+1)$		$-a'_1$			$-b'_1$	$-c'_1$	$-l'_1$	0	$+l'^0_{1\lambda}$
	$(+1)$	$-a'_n$			$-b'_n$	$-c'_n$	$-l'_n$	0	$+l^{0\lambda}_n$
$-a'_1$	$-a'_n$						0	$(a'f')$	0
			(aa)	(ar)	(aB)	(aC)	(al)	(af)	(al^0_λ)
			(ar)	(rr)	(rB)	(rC)	(rl)	(rf)	(rl^0_λ)
$-b'_1$	$-b'_n$		(aB)	(rB)			0	(Bf)	0
$-c'_1$	$-c'_n$		(aC)	(rC)			0	(Cf)	0
							0	(ff)	0

表 2 中(l)行表示常数项，(f) 和 (l^0_λ) 行在求平差值函数权倒数及起始数据误差影响时用到。注意它们在法方程式等号右方。表 2 虚线下面的部分在解算时将作同级约化。

自然，单位权中误差 $M = \sqrt{\dfrac{[pvv]}{R-t}}$。$[pvv]$ 中包含所有 v' 及 v（下同）。式中 R 为

表 3

(B)	(C)	(l)	(f)	(l_λ^0)
y	z			
$-(b'b'\cdot 1)-(B)(B)_r$	$-(b'c'\cdot 1)-(B)(C)_r$	$-(b'l'\cdot 1)-(B)(l)_r$	$-(b')(f')_1+(Bf\cdot r)$	$+(b'l_\lambda'^0\cdot 1)-(B)(l_\lambda^0)_r$
	$-(c'c'\cdot 1)-(C)(C)$	$-(c'l'\cdot 1)-(C)(l)_r$	$-(c')(f')_1+(Cf\cdot r)$	$+(c'l_\lambda'^0\cdot 1)-(C)(l_\lambda^0)_r$
		$\underbrace{-(l'l'\cdot 1)-(l)(l)_r}_{\parallel}$ $-(l)(l)_{r+1}$		
			$\underbrace{+(f')(f')_1+(ff\cdot r)}_{\parallel}$ $(ff\cdot r+1)$	$\underbrace{+(f')(l_\lambda'^0)_1-(f)(l_\lambda^0)_r}_{\parallel}$ $-(f)(l_\lambda^0)_{r+1}$

表 4

(B)	(C)	(l)	(f)	(l_λ^0)
y	z			
$+(b'b'\cdot 1)+(B)(B)_r$	$(b'c'\cdot 1)+(B)(C)_r$	$(b'l'\cdot 1)+(B)(l)_r$	$-(b')(f')_1+(Bf\cdot r)$	$+(b'l_\lambda'^0\cdot 1)-(B)(l_\lambda^0)_r$
	$(c'c'\cdot 1)+(C)(C)_r$	$(c'l'\cdot 1)+(C)(l)_r$	$-(c')(f')_1+(Cf\cdot r)$	$+(c'l_\lambda'^0\cdot 1)-(C)(l_\lambda^0)_r$
		$\underbrace{(l'l'\cdot 1)+(l)(l)_r}_{\parallel}$ $(l)(l)_{r+1}$		
			$\underbrace{-(f')(f')_1-(ff\cdot r)}_{\parallel}$ $-(ff\cdot r+1)$	$\underbrace{-(f')(l_\lambda'^0)_1+(f)(l_\lambda^0)_r}_{\parallel}$ $(f)(l_\lambda^0)_{r+1}$

条件总数(显然连所有误差方程式也应包括在内)；t 为未知数个数。

而

$$-[pvv] = -k_\alpha(-l'_1) - k_\rho(-l'_n) - x \cdot 0 - k_a(al) - k_r(rl) - y \cdot 0 - z \cdot 0 = -(l)(l) \tag{1}$$

"双括号"$(l)(l)$ 与表 2 全体法方程式相应，$[pvv]$ 中包含所有 v 与 v'。

若平差值之函数为

$$\begin{aligned} F &= F(L + v, x, y, z) \\ &= [fL] + [fv] + F_x x + F_y y + F_z z \\ &\qquad \| \qquad \| \qquad \| \\ &\qquad (a'f') \quad (Bf) \quad (Cf) \end{aligned} \tag{2}$$

(2) 式中第二个符号"="表示误差相等；"‖"表示上面的符号记如其下之符号（下同)。另外，$[fv]$ 中不包括用误差方程式表示的 v'，它们已表为未知数之函数。而 $[fL]$ 中则包含一切可能在函数式中出现的观测值 L。此时函数之权倒数为

$$\begin{aligned} Q_F &= (ff) - (\xi f) \cdot 0 - (\eta f) \cdot 0 - q_{a'} \cdot (a'f') \\ &\quad - (\alpha f)(af) - (\rho f)(rf) - q_B(Bf) - q_c(Cf) \\ &= (ff \cdot R + t) \end{aligned} \tag{3}$$

式中 (ξf)，(ηf)，$q_{a'}$，(αf)，(ρf)，q_B 及 q_C 为相应于表 2(f) 行之介数。 R，t 之意义同前。

显然，为计算 $[pvv]$ 及 Q_F 只需在法方程式(表 2)(l) 栏之后再附加 (f) 栏，并由该两栏分别约化求得。但是，我们的目的不在于此。

由表 2 中消去非接合未知数，得法方程式(表 3)。

表 3 是带有未知数的条件平差中未知数的同级约化法方程式，解算时虚线下面将作同级 $(t-1)$ 级约化。其中 r 为条件数(不包括误差方程式)；t 为未知数个数。与此相应地

$$\begin{aligned} -[pvv] &= \{-(l'l' \cdot 1) - (l)(l)_r\} - \{-(b'l' \cdot 1) - (B)(l)_r\}y \\ &\quad - \{-(c'l' \cdot 1) - (C)(l)_r\}z \\ &= (\overline{-(l)(l)_{r+1}} \cdot t - 1) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} Q_F &= \{(f')(f')_1 + (ff \cdot r)\} - \{-(b')(f')_1 + (Bf \cdot r)\}q_B \\ &\quad - \{-(c')(f')_1 + (Cf \cdot r)\}q_C = (\overline{(ff \cdot r + 1)} \cdot t - 1) \end{aligned} \tag{5}$$

表 3 各栏之系数(不顾及符号)，第一部分为间接观测平差部分独立组成法方程式后，接合未知数之同级约化系数；第二部分则为带有未知数的条件平差部分独立组成法方程式后，接合未知数之同级约化系数。在我们的命题中 $r = 2$；$t = 3$。为了说明表 3 中各约化系数及"双括号"之组成与计算规则，兹举数例：

$$\left.\begin{aligned} (l'l' \cdot 1) &= (l'l') - \frac{(a'l')^2}{(a'a')} \\ (f')(f')_1 &= \frac{(a'f')^2}{(a'a')} \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&(b')(f')_1 = \frac{(a'b')(a'f')}{(a'a')}\\
&(b'l'^0_\lambda \cdot 1) = (b'l'^0_\lambda) - \frac{(a'b')(a'l'^0_\lambda)}{(a'a')}\\
&(f')(l'^0_\lambda)_1 = \frac{(a'f')(a'l'^0_\lambda)}{(a'a')}
\end{aligned}\right\}\text{间接观测平差部分}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(l)(l)_r = (l)(l)_2 = \frac{(al)^2}{(aa)} + \frac{(rl\cdot 1)^2}{(rr\cdot 1)}\\
&(ff\cdot r) = (ff\cdot 2) = (ff) - \frac{(af)^2}{(aa)} - \frac{(rf\cdot 1)^2}{(rr\cdot 1)}\\
&(Bf\cdot r) = (Bf\cdot 2) = (Bf) - \frac{(aB)(af)}{(aa)} - \frac{(rB\cdot 1)(rf\cdot 1)}{(rr\cdot 1)}\\
&(B)(l^0_\lambda)_r = (B)(l^0_\lambda)_2 = \frac{(aB)(al^0_\lambda)}{(aa)} + \frac{(rB\cdot 1)(rl^0_\lambda\cdot 1)}{(rr\cdot 1)}\\
&(f)(l^0_\lambda)_r = (f)(l^0_\lambda)_2 = \frac{(af)(al^0_\lambda)}{(aa)} + \frac{(rf\cdot 1)(rl^0_\lambda\cdot 1)}{(rr\cdot 1)}
\end{aligned}\right\}\text{带有未知数的条件平差部分}$$

余此类推。

注意，表 3 中 $(B),(C)$ 行之负号!

将表 3 之 $(B),(C),(l)$ 行以及 $(f),(l^0_\lambda)$ 两行中仅虚线下面的部分反其符号即得接合未知数 y 和 z 之等价法方程式(表 4)。

此时，表 4 已相当于间接观测平差中之同级约化法方程式。解算时虚线以下作同级($t-1$ 级)约化。故

$$[pvv] = \{(l'l'\cdot 1) + (l)(l)_r\} - \{(b'l'\cdot 1) + (B)(l)_r\}y - \{(c'l'\cdot 1) + (C)(l)_r\}z = (\overline{(l)(l')_{r+1}}\cdot t-1) \tag{6}$$

$$-Q_F = \{-(f')(f')_1 - (ff\cdot r)\} - \{-(b')(f')_1 + (Bf\cdot r)\}q'_B - \{-(c')(f')+(Cf\cdot r)\}q'_C = (\overline{-(ff\cdot r+1)}\cdot t-1) \tag{7}$$

式中 q'_B 及 q'_C 为表 4 中 (f) 行之介数，并且 $q'_B = -q_B$; $q'_C = -q_C$。

显而易见，接合未知数法方程式(表 4)之系数组成规则为：$(B),(C)$ 及 (l) 各项系数为间接观测平差部分独立组成法方程式后，接合未知数的同级约化系数中与带有未知数之条件平差部分独立组成法方程式后相应同级约化系数的反号之和(约定函数式中接合未知数之系数写入带有未知数的条件平差法方程式中，非接合未知数之系数则写入未知数平差之法方程式中)；(f) 行中虚线上面的部分为上述二约化系数之和，下面一项中仅条件平差部分(第二部分)反其符号。表 4 中各约化系数及"双括号"之组成规则详见表 3 后之例。

本来，带有未知数的条件平差中未知数的同级约化法方程式反其符号就是它们的等价法方程式，因此上面的结论是当然的。

这样，在并用间接观测与带有未知数的条件法作分区接合平差时，只要确定了接合未知数，各区即可完全分别独立地列出误差方程式及带有未知数的条件方程式，并各自组成法方程式。各区分别消去非接合未知数后，则照上述规则组成接合未知数之总法方程式。解出后分头代入各分区求得全部平差值。$[pvv]$ 及 Q_F 也可由总法方程式中约化求得。

值得注意的是，间接观测平差与条件观测平差分区中不应有公共观测，公共观测以划归间接观测平差为宜，而在条件中公共方向改正数则表为接合未知数之函数(一般用公共方向之误差方程式代入即可。此时，由于公共方向误差方程式中之未知数本身为接合未知数，而代入后未引入新的未知数，所以条件数并不改变)。

计算单位权中误差时，多余观测数为 $R-t$(R，t 之意义同前)或为 $n-t'+r-t^0$(n 为间接观测平差分区中之观测总数；t' 为非接合未知数数目；t^0 为接合未知数个数；r 为带有未知数的条件平差分区中之条件总数)。

三、并用带有未知数的条件平差与间接观测平差时顾及起始数据误差之平差值函数中误差

我们仍从带有未知数的条件平差原理出发，将网中间接观测部分之误差方程式视为条件式。设平差值函数为

$$\begin{aligned} F &= F(L_1+v_1, L_n+v_n, x, y, z, \lambda, \theta, \zeta) \\ &= [fL]+[fv]+F_x x+F_y y+F_z z+f_\lambda\lambda+f_\theta\theta+f_\zeta\zeta \\ &\qquad\qquad \| \qquad \| \qquad \| \\ &\qquad (a'f') \quad (Bf) \quad (Cf) \end{aligned} \tag{8}$$

(8)式中之 λ，θ 和 ζ 为平差中之已知数据，它们也都含有误差，这里假设这些误差是相互独立的。$[fv]$ 中不包括误差方程式之 v'。

条件式不符值中之起始数据部分以 w_a^0，w_r^0 或 $-(al^0)$，$-(rl^0)$ 记之；视为条件式之误差方程式中之常项，l' 中的起始数据部分以 l'^0 表之；未知数部分记作 x^0，y^0 及 z^0；联系数及改正数部分则分别以 k_a^0，k_r^0 或 (αl^0)、(ρl^0) 及 v^0 表示。于是

$$pv^0 = ak_a^0 + rk_r^0 = a(\alpha l^0) + r(\rho l^0)$$

由此

$$\begin{aligned} &[fv^0]+(a'f')x^0+(Bf)y^0+(Cf)z^0 \\ &\quad = (-l_1'^0)(\xi f)+(-l_n'^0)(\eta f)+0\cdot q_{a'}+(al^0)(\alpha f)+(rl^0)(\rho f) \\ &\qquad +0\cdot q_B+0\cdot q_C=(f)(l^0) \end{aligned} \tag{9}$$

(9)式中各符号之意义与(3)式相同，“双括号” $(f)(l^0)$ 与法方程式(表 2)相应。但是

$$\begin{aligned} (al^0) &= -w_a^0 = -w_{a\lambda}\lambda - w_{a\theta}\theta - w_{a\zeta}\zeta, \\ &\qquad\qquad \| \qquad \| \qquad \| \\ &\qquad (al_\lambda^0) \quad (al_\theta^0) \quad (al_\zeta^0) \\ (rl^0) &= -w_r^0 = -w_{r\lambda}\lambda - w_{r\theta}\theta - w_{r\zeta}\zeta, \\ &\qquad\qquad \| \qquad \| \qquad \| \\ &\qquad (rl_\lambda^0) \quad (rl_\theta^0) \quad (rl_\zeta^0) \\ -l'^0 &= -l_\lambda'^0 - l_\theta'^0\theta - l_\zeta'^0\zeta, \end{aligned}$$

其中 $w_{a\lambda}\cdots l_\lambda'^0\cdots$ 为常数项对相应起始数据之偏导数。因此

$$\begin{aligned} &[fv^0]+(a'f')x^0+(Bf)y^0+(Cf)z^0 \\ &\quad = -(f)(l_\lambda^0)\lambda-(f)(l_\theta^0)\theta-(f)(l_\zeta^0)\zeta \end{aligned} \tag{10}$$

式中之“双括号”与表 2 之全体法方程式相应，即

$$-(f)(l_\lambda^0) = -(l_{1\lambda}'^0)(\xi f)-(l_{n\lambda}'^0)(\eta f)-0\cdot q_{a'}-(al_\lambda^0)(\alpha f)$$

$$-(rl_\lambda^0)(\rho f) - 0 \cdot q_B - 0 \cdot q_C \tag{11}$$

$$-(f)(l_\theta^0) = -(l_{1\theta}'^0)(\xi f) - (l_{n\theta}'^0)(\eta f) - 0 \cdot q_{a'} - (al_\theta^0)(\alpha f)$$
$$-(rl_\theta^0)(\rho f) - 0 \cdot q_B - 0 \cdot q_C \tag{12}$$

$$-(f)(l_\zeta^0) = -(l_{1\zeta}'^0)(\xi f) - (l_{n\zeta}'^0)(\eta f) - 0 \cdot q_{a'} - (al_\zeta^0)(\alpha f)$$
$$-(rl_\zeta^0)(\rho f) - 0 \cdot q_B - 0 \cdot q_C \tag{13}$$

函数式中之起始数据部分为

$$F^0 = \underbrace{\{f_\lambda - (f)(l_\lambda^0)\}}_{\| \; f_\lambda'}\lambda + \underbrace{\{f_\theta - (f)(l_\theta^0)\}}_{\| \; f_\theta'}\theta + \underbrace{\{f_\zeta - (f)(l_\zeta^0)\}}_{\| \; f_\zeta'}\zeta$$

而

$$m_{F^0}^2 = (f_\lambda')^2 m_\lambda^2 + (f_\theta')^2 m_\theta^2 + (f_\zeta')^2 m_\zeta^2 \tag{14}$$

其中 m_λ, m_θ 及 m_ζ 为起始数据之中误差。

最后，顾及起始数据误差之函数中误差为

$$m_F^2 = (ff \cdot r + t)\mu^2 + m_{F^0}^2 \tag{15}$$

$(ff \cdot r + t)$ 之计算已于本文第一节中述及。显然式(11),(12)和(13)的计算可在法方程式表 2 之后附加 (l_λ^0), (l_θ^0) 及 (l_ζ^0) 行，于约化时一并求出。然而，这也不是我们的主旨。

与前相仿，相应于接合未知数之法方程式表 3，(11)式可写成

$$-(f)(l_\lambda^0) = \underbrace{(f')(l_\lambda'^0)_1 - (f)(l_\lambda^0)_r}_{\| \; -(f)(l_\lambda^0)_{r+1}} - \{(b'l_\lambda'^0 \cdot 1) - (B)(l_\lambda^0)_r\}q_B$$
$$- \{(c'l_\lambda'^0 \cdot 1) - (C)(l_\lambda^0)_r\}q_C \circ \tag{16}$$

(12),(13)式类此。

相应于等价法方程式表 4(与间接观测平差中未知数之同级约化法方程式相当)，则

$$-(f)(l_\lambda^0) = \{-(f')(l_\lambda'^0) + (f)(l_\lambda^0)_r\} - \{(b'l_\lambda'^0 \cdot 1) - (B)(l_\lambda^0)_r\}q_B'$$
$$- \{(c'l_\lambda'^0 \cdot 1) + (C)(l_\lambda')_r\}q_C' = (\overline{(f)(l_\lambda')_{r+1}} \cdot t - 1) \tag{17}$$

其中 q_B' 及 q_C' 之意义前已述及。“双括号” $-(f)(l_\lambda^0)$ 可于表 4(l_λ^0) 行的约化求得。而此时按照间接观测平差法，则(14)式中之 f_λ' 相应为

$$f_\lambda' = f_\lambda + (f)(l_\lambda^0)$$

表 4 中 (l_λ^0) 行系数之组成规则是：虚线以上为间接观测平差部分约化系数与带有未知数的条件平差部分相应约化系数之和；虚线下面一项中仅条件部分反号。各约化系数及“双括号”之意义，详见表 3 后之例。

$-(f)(l_\theta^0)$ 及 $-(f)(l_\zeta^0)$ 之计算与(17)式同，只需在表 4 中再附加 (l_θ^0) 及 (l_ζ^0) 行即可。

由此可见，$(f)(l_\lambda^0)$ 之计算亦可分区分别计算其部分值及各约化系数（分区计算时 $(al_\lambda'^0)$, $(b'l_\lambda'^0)$ 及 $(c'l_\lambda'^0)$ 列入间接观测平差相应的法方程之一列，(al_λ^0), (rl_λ^0) 则列入带有未知数的条件平差中相应法方程式之一列)，然后再相加并由接合未知数之总法方程式求其最后值(参看表 4(l_λ^0) 行)。这就是我们的结论。

四、顾及起始数据误差时不同平差系统的平差值函数中误差

设图 1 中 A，C 两区分别平差，此后再作 B 区之附合平差，且 B 区与 A，C 区有公共

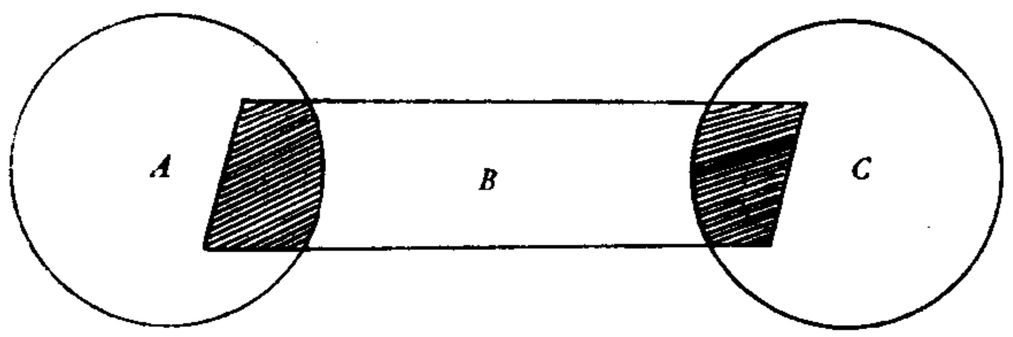


图 1

观测（图 1 斜线所示部分）。又若 A，C 区采用间接观测平差，误差方程式系数分别以 a，b 及 a'，b' 表之；B 区采用条件平差，条件以 a^0，r^0 记之。令平差值之函数为

$$\begin{aligned}
F &= F_A + F_B + F_C \\
&= (aF)x + (bF)y + [fL^B] + [fv^B] \\
&\quad + F_x x + F_y y + F_{x'}x' + F_{y'}y' \\
&\qquad \| \quad \| \quad \| \quad \| \\
&\qquad (Af) \quad (Bf) \quad (A'f') \quad (B'f') \\
&\quad + (a'F')x' + (b'F')y' \\
&= \{(aF) + (Af)\}x + \{(bF) + (Bf)\}y \\
&\quad + [fL^B] - w_{a^0}(\alpha^0 f) - w_{r^0}(\rho^0 f) \\
&\quad + \{(a'F') + (A'f')\}x' + \{(b'F') + (B'f')\}y' \qquad (18)
\end{aligned}$$

(18)式中之 x，y 分别为 A 及 C 区之未知数；v^B 为 B 区之方向改正数；L^B 为 B 区之方向观测值；$(\alpha^0 f)$、$(\rho^0 f)$ 为条件平差部分之介数；w_{a^0}、w_{r^0} 为条件不符值。而欲求(18)式之中误差，需先将其展为观测值之线性函数，这是解决这一问题的基本思想。

B 区既作附合平差，则条件不符值 w_{a^0} 及 w_{r^0} 中必含有 A，C 区未知数 x，y 及 x'，y' 之影响，即

$$\left.\begin{aligned}
w_{a^0} &= [a^0 L^B] + w_{a^0_x}x + w_{a^0_y}y + w_{a^0_{x'}}x' + w_{a^0_{y'}}y', \\
w_{r^0} &= [r^0 L^B] + w_{r^0_x}x + w_{r^0_y}y + w_{r^0_{x'}}x' + w_{r^0_{y'}}y',
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

式中 $w_{a^0_x}$，$w_{a^0_y}$，$w_{a^0_{x'}}\cdots w_{r^0_{y'}}$ 均为相应不符值对于 x，y，x' 及 y' 之偏导数。将(19)式代入(18)式乃得

$$\begin{aligned}
F &= \{(aF) + (Af) - w_{a^0_x}(\alpha^0 f) - w_{r^0_x}(\rho^0 f)\}x \\
&\quad + \{(bF) + (Bf) - w_{a^0_y}(\alpha^0 f) - w_{r^0_y}(\rho^0 f)\}y \\
&\quad + [fL^B] - [a^0 L^B](\alpha^0 f) - [r^0 L^B](\rho^0 f) \\
&\quad + \{(a'F') + (A'f') - w_{a^0_{x'}}(\alpha^0 f) - w_{r^0_{x'}}(\rho^0 f)\}x' \\
&\quad + \{(b'F') + (B'f') - w_{a^0_{y'}}(\alpha^0 f) - w_{r^0_{y'}}(\rho^0 f)\}y' \\
&= (AF)x + (BF)y + [fL^B] - [a^0 L^B](\alpha^0 f) \\
&\quad - [r^0 L^B](\rho^0 f) + (A'F')x' + (B'F')y' \\
&= (\Delta F L^A) + (f' L^B) + (\Delta F' L^C) \qquad (20)^{[3]}
\end{aligned}$$

式中 L^A, L^B 及 L^C 分别为 A, B 及 C 区之观测值。而

$$\left.\begin{aligned}(AF) &= \{(aF) + (Af)\} - w_{a_x^0}(\alpha^0 f) - w_{r_x^0}(\rho^0 f)\\ (BF) &= \{(bF) + (Bf)\} - w_{a_y^0}(\alpha^0 f) - w_{r_y^0}(\rho^0 f)\\ (A'F') &= \{(a'F') + (A'f')\} - w_{a_{x'}^0}(\alpha^0 f) - w_{r_{x'}^0}(\rho^0 f)\\ (B'F') &= \{(b'F')(B'f')\} - w_{a_{y'}^0}(\alpha^0 f) - w_{r_{y'}^0}(\rho^0 f)\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

其计算可在条件平差之法方程式中增加 (w_x)、(w_y)、$(w_{x'})$ 及 $(w_{y'})$ 诸行进行约化。又

$$\Delta F_i = (AF)\alpha_i + (BF)\beta_i = (F)(\delta_i)$$

$$\Delta F'_i = (A'F')\alpha'_i + (B'F')\beta'_i = (F')(\delta_i)$$

$$f'_i = f_i - a_i^0(\alpha^0 f) - r_i^0(\rho^0 f) = (f_i \cdot r)$$

其中 α_i, β_i 及 α'_i, β'_i 为间接观测平差之权系数，a_i^0, r_i^0 及 α_i^0, ρ_i^0 分别为条件平差中之条件方程式系数及权系数。注意到 L^B 中包含有与 A, C 区之公共观测部分，设纯属 A, B 及 C 区之观测分别以 L^{A^0}, L^{B^0} 及 L^{C^0} 记之，B 区与 A, C 区之公共部分表为 L^{BA} 及 L^{BC}，即

$$(f'L^B) = (f'L^{B^0}) + (f'L^{BA}) + (f'L^{BC})$$

$$(\Delta F L^A) = \Delta F L^{A^0} + (\Delta F L^{BA}) + (\Delta F L^{BC})$$

$$(\Delta F' L^C) = (\Delta F' L^{C^0}) + (\Delta F' L^{BA}) + (\Delta F' L^{BC})$$

由是(20)式写成

$$F = (\Delta F L^{A^0}) + (\overline{\Delta F + f'} \cdot L^{BA}) + (f'L^{B^0}) + (\Delta F' L^{C^0}) + (\overline{\Delta F' + f'} \cdot L^{BC}) \tag{22}$$

式(22)已将函数 F 表为观测值之线性形式。

显然，函数之权倒数为

$$\begin{aligned}Q_F &= (\Delta F \cdot \Delta F)_A \cdot + (\Delta F \cdot \Delta F)_{BA} + 2(\Delta F \cdot f')_{BA}\\ &\quad + (f' \cdot f')_{BA} + (f' \cdot f')_{B^0} + (\Delta F' \cdot \Delta F')_{C^0} + (\Delta F' \cdot \Delta F')_{BC}\\ &\quad + 2(\Delta F' \cdot f')_{BC} + (f' \cdot f')_{BC}\\ &= (\Delta F \cdot \Delta F)_A + (f' \cdot f')_B + (\Delta F' \cdot \Delta F')_C + 2(\Delta F \cdot f')_{BA}\\ &\quad + 2(\Delta F' \cdot f')_{BC}\\ &= (F)(F)_A + (ff \cdot r)_B + (F')(F')_C + 2(\Delta F \cdot f')_{BA}\\ &\quad + 2(\Delta F' \cdot f')_{BC}\end{aligned} \tag{23}$$

函数之中误差

$$m_F = \mu\sqrt{\theta_F} \tag{23}'$$

式中 μ 为单位权中误差。(23)式中

$$\left.\begin{aligned}(\Delta F \cdot f') &= (\xi F)(af') + (\eta F)(bf') = (F)(f')\\ (\Delta F' \cdot f') &= (\xi' F')(a'f') + (\eta' F')(b'f') = (F')(f')\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

而 (ξF), (ηF) 及 $(\xi' F')$, $(\eta' F')$ 分别为 A, C 区间接观测平差中相应于 (F) 及 (F') 行之介数，式(24)与其全体法方程式相应，可于其中增加 (f') 行约化求之。f' 为条件平差

中函数式之约化系数。a, b 及 a', b' 分别为 A, C 区误差方程式系数。

$$\left.\begin{aligned}(af') &= (af) - (a^0a)(\alpha^0f) - (r^0a)(\rho^0f) = (af\cdot r)\\(bf') &= (bf) - (a^0b)(\alpha^0f) - (r^0b)(\rho^0f) = (bf\cdot r)\\(a'f') &= (a'f\cdot r)\\(b'f') &= (b'f\cdot r)\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

(25)式各值则在条件平差中通过约化求得。

(23)式中之 $(F)(F)_A, (ff\cdot r)_B$ 及 $(F')(F')_C$ 就是按一般方法分别在 A，B 及 C 区所求得之部分函数 F_A, F_B 及 F_C 之权倒数，此时必须注意(21)式各符号之意义。

如果公共观测不多，(23)式中最后两项可不必计算。

上述计算程序归纳为：

(1) 列出函数式(18)；

(2) 求条件式不符值对未知数之偏导数，并预先在条件平差中求得(21)式各值；

(3) 顾及(21)式，按一般方法求函数式(18)中各部分函数 F_A，F_B 及 F_C 之权倒数 $(F)(F)_A, (ff\cdot r)_B$ 及 $(F')(F')_C$；

(4) 为了计算 $(\Delta F\cdot f')$ 和 $(\Delta F'\cdot f')$ 必须首先按(25)式在条件平差中求 (af')、(bf')、$(a'f')$ 及 $(b'f')$；然后再按(24)式在间接观测平差中计算 $(F)(f')$ 和 $(F')(f')$；

(5) 最后按(23)及(25)式计算函数中误差。

接着我们研究起始数据误差对本节伊始所述平差值函数之影响。

如果平差中的起始数据 λ, θ 含有误差，并且是相互独立的，在本节所讨论的问题中，此等误差一方面在 A, B 区误差方程式常数项中出现，从而影响未知数；另一方面又存在于条件不符值中，从而影响联系数 k 及改正数 v；同时它们也直接出现在函数式中。仍用前述符号时，则平差值之函数式(18)写成：

$$\begin{aligned}F &= F_A + F_B + F_C\\&= (aF)x + (bF)y\\&\quad + [fL^B] + [fv^B] + \underset{\|}{F_x}x + \underset{\|}{F_y}y + \underset{\|}{F_{x'}}x' + \underset{\|}{F_{y'}}y'\\&\qquad\qquad\qquad\qquad (Af)\quad (Bf)\quad (A'f')\quad (B'f')\\&\quad + (a'F')x' + (b'F')y' + f_\lambda\lambda + f_\theta\theta\\&= \{(aF) + (Af)\}x + \{(bF) + (Bf)\}y\\&\quad + [fL^B] - w_a{}^0(\alpha^0f) - w_r{}^0(\rho^0f)\\&\quad + \{(a'F') + (A'f')\}x' - \{(b'F') + (B'f')\}y'\\&\quad + f_\lambda\lambda + f_\theta\theta\end{aligned} \tag{26}$$

仍设误差方程式常数项中之起始数据部分为：

$$A\text{区}\quad l^0 = l_\lambda\lambda + l_\theta\theta$$

$$C\text{区}\quad l'^0 = l'_\lambda\lambda + l'_\theta\theta$$

由此 x, y；x' 及 y' 中之起始数据部分为

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= (\alpha l_\lambda)\lambda + (\alpha l_\theta)\theta \\ y^0 &= (\beta l_\lambda)\lambda + (\beta l_\theta)\theta \\ x'^0 &= (\alpha' l'_\lambda)\lambda + (\alpha' l'_\theta)\theta \\ y'^0 &= (\beta' l'_\lambda)\lambda + (\beta' l'_\theta)\theta \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

条件式不符值既受 A,C 区未知数之影响(见(19)式),则其中起始数据部分可写成

$$\left.\begin{aligned} w_a^0 &= w_{a_x^0}x^0 + w_{a_y^0}y^0 + w_{a_{x'}^0}x'^0 + w_{a_{y'}^0}y'^0 \\ &\quad + w_{a_\lambda^0}\lambda + w_{a_\theta^0}\theta \\ &\quad\quad \| \qquad \| \\ &\quad (a^0 w_\lambda)\ (a^0 w_\theta) \\ w_r^0 &= w_{r_x^0}x^0 + w_{r_y^0}y^0 + w_{r_{x'}^0}x'^0 + w_{r_{y'}^0}y'^0 \\ &\quad + w_{r_\lambda^0}\lambda + w_{r_\theta^0}\theta \\ &\quad\quad \| \qquad \| \\ &\quad (r^0 w_\lambda)\ (r^0 w_\theta) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

式中 $w_{a_x^0}, w_{a_y^0}\cdots$之意义与(19)式相同; $w_{a_\lambda^0}, w_{a_\theta^0}, w_{r_\lambda^0}$ 及 $w_{r_\theta^0}$ 为相应不符值对 λ,θ 之偏导数,依次记作 $(a^0w_\lambda),(a^0w_\theta),(r^0w_\lambda)$ 及 (r^0w_θ)。其中 w_λ, w_θ 不必实际有之,但 $(a^0w_\lambda),(a^0w_\theta)\cdots$有定值。

函数式中起始数据之间接影响为

$$\begin{aligned} &\{(aF)+(Af)\}x^0 + \{(bF)+(Bf)\}y^0 - w_a^0(\alpha^0 f) - w_r^0(\rho^0 f) \\ &\quad + \{(a'F')+(A'f')\}x'^0 + \{(b'F')+(B'f')\}y'^0 \end{aligned} \tag{29}$$

将(27)及(28)式代入上式并顾及(21)式之符号,则得函数中起始数据间接影响之线性表示:

$$\begin{aligned} &\{(AF)(\alpha l_\lambda)+(BF)(\beta l_\lambda)\}\lambda + \{(AF)(\alpha l_\theta)+(BF)(\beta l_\theta)\}\theta \\ &\quad - \{(a^0w_\lambda)(\alpha^0 f)+(r^0w_\lambda)(\rho^0 f)\}\lambda - \{(a^0w_\theta)(\alpha^0 f)+(r^0w_\theta)(\rho^0 f)\}\theta \\ &\quad + \{(A'F')(\alpha' l'_\lambda)+(B'F')(\beta' l'_\lambda)\}\lambda + \{(A'F')(\alpha' l'_\theta)+(B'F')(\beta' l'_\theta)\}\theta \\ &= \{(F)(l_\lambda)-(f)(w_\lambda)+(F')(l'_\lambda)\}\lambda + \{(F)(l_\theta)-(f)(w_\theta)+(F')(l'_\theta)\}\theta \end{aligned} \tag{30}$$

因此,函数中起始数据之直接与间接影响合并为

$$\begin{aligned} F^0 &= \{\underbrace{f_\lambda + (F)(l_\lambda) - (f)(w_\lambda) + (F')(l'_\lambda)}_{\| \ f'_\lambda}\}\lambda \\ &\quad + \{\underbrace{f_\theta + (F)(l_\theta) - (f)(w_\theta) + (F')(l'_\theta)}_{\| \ f'_\theta}\}\theta \\ &= f'_\lambda\lambda + f'_\theta\theta \end{aligned} \tag{31}$$

而

$$m_{F^0}^2 = (f'_\lambda)^2 m_\lambda^2 + (f'_\theta)^2 m_\theta^2 \tag{32}$$

上列各式中符号之意义前已述及。“双括号”$(F)(l_\lambda)$, $(F)(l_\theta)$ 应在 A 区平差中计算;$(f)(w_\lambda)$, $(f)(w_\theta)$ 应在 B 区平差中计算; $(F')(l'_\lambda)$, $(F')(l'_\theta)$ 则在 C 区平差中计算。为此只须在 A 区法方程式中附加 (l_λ) 和 (l_θ) 行, B 区附加 (w_λ) 和 (w_θ) 行, C 区附加 (l'_λ) 及 (l'_θ)行进行约化即可,此外无须多加说明。唯应注意者,在计算此等“双括号”时,应预先按照 (21) 式计算(AF), (BF), $(A'F')$及$(B'F')$,它们在计算 Q_F 时业已用过。

最后，顾及起始数据误差，如本节命题之函数中误差为

$$m_F^2 = \mu^2 Q_F + m_{F0}^2 \tag{33}$$

式中 Q_F 即为按(32)式所求得者，μ 仍表单位权中误差。

本节所述理论作狭义理解即如命题所云，若作广义理解，则可作为各级控制网按不同方法平差并顾及起始数据误差时，求平差值函数中误差之一般理论。本文仅导至两级，当然还可以推广到更多的级次。

参 考 文 献

[1] 周江文、张牙：一等三角锁与二等网联合平差初步方案，测绘学报，第5卷，第2期，科学出版社，1962年。
[2] 周江文：大规模三角锁的直接平差法，测绘出版社，1956年。
[3] 武汉测绘学院大地测量教研组：大地测量学(中册)，中国工业出版社，1964年。
[4] И. Ю. 普兰尼斯-普兰涅维奇著，中国人民解放军总参谋部测绘局译：三角测量平差计算手册，测绘出版社，1958年。
[5] П. И. 希洛夫著，测绘书籍编译社译：最小二乘法，地质出版社，1955年。

TRIAL COMPUTATION REPORT OF THE PRELIMINARY SCHEME FOR THE COMBINED ADJUSTMENT OF FIRST-ORDER TRIANGULATION CHAINS AND SECOND-ORDER NETWORKS (2)

——SEVERAL THEORETICAL PROBLEMS

Xi Qinwen

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

This paper is the second part of "Trial Computation Report of the Preliminary Scheme for the Combined Adjustment of First-order Triangulation Chains and Second-order Networks". In this paper, by using "double brackets", some theoretical problems related to trial computation are discussed.

(1) Method of combined adjustment of divided area for conditional observation with unknown and indirect observation and the functional mean error of the adjusted value when taking the effect of the initial data error into account.

(2) The functional mean error of adjusted value in different adjustment systems when taking the initial data error into account.

The former may be taken as a direct junction theory in the divided area adjustment with different methods on a large scale. All the computations of functional mean error, etc. may be carried out independently in divided areas, and then done jointly; the latter may be taken as a general theory to get the functional mean error of adjusted value when using different methods and setting up control networks from one order to another and taking the initial data error into account. In this paper, only two orders are derived. Of course, more orders may be spread.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

水准测量往返中数系统方差的估值

庄　昆　元

摘　　要

本文应用最大似然原理推导了水准测量往返中数系统方差的估值 ξ'^2，同时也给出了他的近似无偏估值 ξ_1^2（或 ξ_2^2）。文中介绍了 ξ_1^2（或 ξ_2^2）的详细计算方法。最后论述了拉勒孟公式的不合理性，用该式算得的 ξ^2 值约为正确值的 $1/m$。 算例的结果表明我们的结论是正确的。

一

本文之目的在于应用最大似然原理以推求水准测量往返中数系统方差的估值。假设有一个水准网如图 1 中所示，其中 I, II, ··· N 为结点。对每一个由两相邻结点所构成的水准路线 α 来说，$\alpha = 1, 2, \cdots, n$，都对应着一个观测量 l_α（已进行过正高改正的往返中数，以下同）。显然，l_α 由高差真值 h_α，系统误差及偶然误差 χ_α 三部分构成。我们在水准路线 α 内，依据路线中不同的土质情况，观测人员及采用仪器等等客观条件，把水准路线划分成 i 个水准线。在每个水准线内假定系统误差为一固定值 $C_{\alpha i}$，但在不同的水准线之间 $C_{\alpha i}$ 则正态地进行随机变化。这样，我们可得出下式

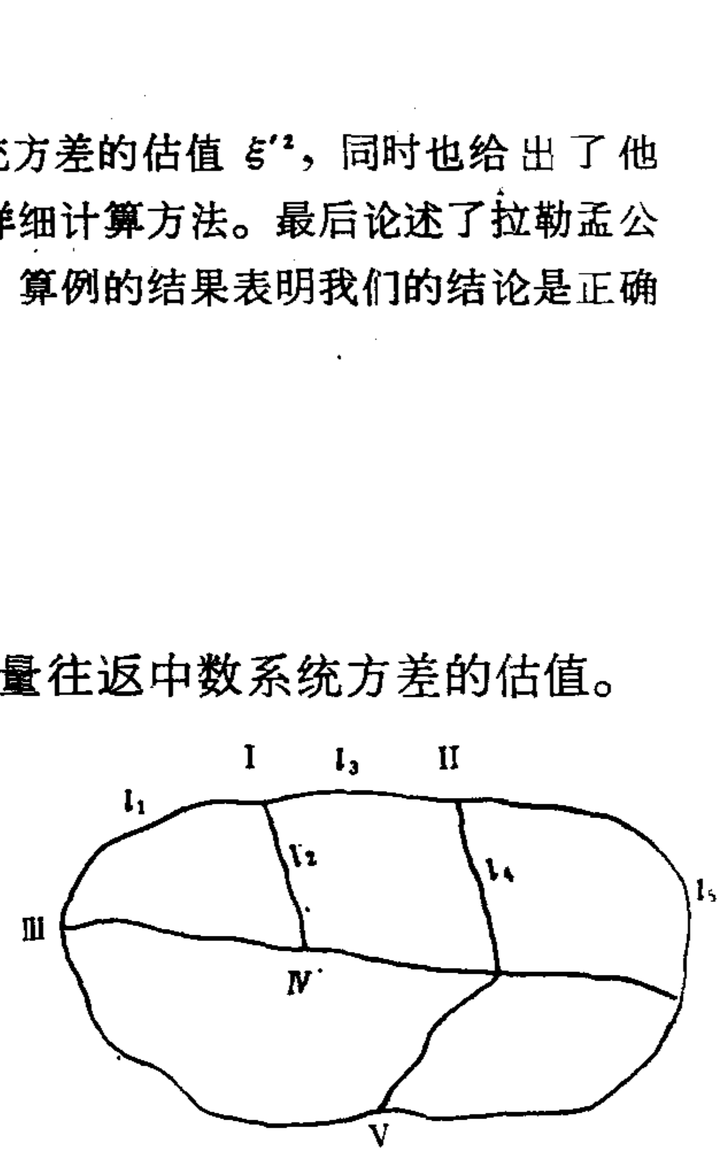


图　1

$$l_\alpha = h_\alpha + [R_{\alpha i} C_{\alpha i}]_i + \chi_\alpha \tag{1}$$

式中 $R_{\alpha i}$ 为 α 中第 i 条水准线以公里为单位的长度，故 $[R_{\alpha i}]_i = R_\alpha$。而

$$h_\alpha = a_\alpha h_a + b_\alpha h_b + \cdots + t_\alpha h_t = [j_\alpha h_j] \tag{2}$$
$$j = a, b, \cdots, t,$$

式中 $h_a, h_b, \cdots, h_t$ 为网中作为未知量而选用的独立高差真值，共七个。显然，j_α 仅取 $+1$, 0 及 -1 等值。于是

$$l_\alpha = [j_\alpha h_j]_j + [R_{\alpha i} C_{\alpha i}]_i + \chi_\alpha \tag{3}$$

设偶然误差是正态机量，其期望为 0。如果水准测量每公里往返中数之偶然方差为 η^2，则 χ_α 之方差为 $R_\alpha \eta^2$，而 χ_α 为 $(0, R_\alpha \eta^2)$ 正态机量。

我们再设系统误差 $C_{\alpha i}$ 在各个不同的水准线之间是一个正态机量。于是，相对于偶然误差来说，它是一个第 II 级机量。通常我们认为它的期望为 0，而水准测量每公里往返中数之系统误差的方差为 ξ^2（这里也就是系统误差平方的期望），那末 $C_{\alpha i}$ 为 $(0, \xi^2)$ 正

态机量。于是由(3)式可知 l_α 为 $([j_\alpha h_j]_j, [R_{\alpha i}^2]_i\xi^2 + R_\alpha\eta^2)$ 正态机量。而变量

$$\Delta l_\alpha = l_\alpha - [j_\alpha h_j]_j \tag{4}$$

为 $(0, [R_{\alpha i}^2]_i\xi^2 + R_\alpha\eta^2)$ 正态机量。这就是我们的误差模型。

二

下面我们利用最大似然法来推求 h_j 及 ξ^2 之估值。为此，先假定已利用周江文的水准测量误差统计公式[1]算得了偶然方差 η^2。我们认为这一估值是相当可靠的。

由上节知 l_α 之概率密度(弃去部分常数)为

$$\frac{1}{\sqrt{[R_{\alpha i}^2]_i\xi^2 + R_\alpha\eta^2}}\exp\left\{-\frac{(l_\alpha - [j_\alpha h_j]_j)^2}{2([R_{\alpha i}^2]_i\xi^2 + R_\alpha\eta^2}\right\} \tag{5}$$

对 l_α 之联合概率密度取对数，得

$$L = -\frac{1}{2}[l_n([R_{\alpha i}^2]_i\xi^2 + R_\alpha\eta^2)]_\alpha - \frac{1}{2}\left[\frac{(l_\alpha - [j_\alpha h_j]_j)^2}{[R_{\alpha i}^2]_i\xi^2 + R_\alpha\eta^2}\right]_\alpha \tag{6}$$

函数 L 对 ξ^2 的偏导数为

$$\frac{\partial L}{\partial\xi^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{[R_{\alpha i}^2]_i}{[R_{\alpha i}^2]_i\xi^2 + R_\alpha\eta^2}\right]_\alpha + \frac{1}{2}\left[\frac{(l_\alpha - [j_\alpha h_j]_j)^2[R_{\alpha i}^2]_i}{([R_{\alpha i}^2]\xi^2 + R_\alpha\eta^2)^2}\right]_\alpha \tag{7}$$

令

$$\xi^2 + \frac{R_\alpha}{[R_{\alpha i}^2]_i}\eta^2 = \xi^2/\lambda_\alpha$$

故

$$\lambda_\alpha = \frac{[R_{\alpha i}^2]_i}{[R_{\alpha i}^2]_i + R_\alpha\theta} \quad \theta = \frac{\eta^2}{\xi^2} \tag{8}$$

再令

$$\frac{\partial L}{\partial\xi^2} = 0$$

即可得出 ξ^2 之估值为

$$\xi'^2 = \frac{[\lambda_\alpha^2(l_\alpha - [j_\alpha h_i']_j)^2/[R_{\alpha i}^2]_i]_\alpha}{[\lambda_\alpha]_\alpha} \tag{9}_1$$

式中 h_j' 为 h_j 之估值。再设

$$p_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{[R_{\alpha i}^2]_i} = \frac{1}{[R_{\alpha i}^2]_i + R_\alpha\theta} \tag{10}$$

$$v_\alpha = l_\alpha - [j_\alpha h_j']_j \tag{11}$$

于是

$$\xi'^2 = \frac{[\lambda_\alpha p_\alpha v_\alpha^2]_\alpha}{[\lambda_\alpha]_\alpha} \tag{9}_2$$

为求 h_j 之估值 h_j'，我们令 $\frac{\partial L}{\partial h_j} = 0$，顾及(10)式，我们可得

$$\frac{\partial L}{\partial h_a} = \frac{[p_a(l_a - [j_a h'_j]_j)a_a]_a}{\xi^2} = 0$$

即

$$\left.\begin{aligned} &[paa]h'_a + [pab]h'_b + \cdots + [pat]h'_t = [pal] \\ &[pab]h'_a + [pbb]h'_b + \cdots + [pbt]h'_t = [pbl] \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &[pat]h'_a + [pbt]h'_b + \cdots + [ptt]h'_t = [ptl] \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

现在我们推求估值 ξ'^2 的性质。为了推导的方便我们近似地认为各 R_{ai} 之值相等，于是由(7)可知各 λ_a 亦近似相等。由$(9)_2$式可得

$$\xi'^2 \approx \frac{1}{n}[p_a v_a^2]_a \tag{13}$$

再则由(4)并顾及(10)式可知，Δl_a 为 $\left(0, \frac{\xi^2}{p_a}\right)$ 正态机量。于是$\left[\frac{p_a \Delta l_a}{\xi^2}\right]_a$是自由度为 n 的 χ^2 变量。如果我们现在在 Δl_a 中以 h_j 之最小二乘估值 h'_j 来代替 h_j，则 Δl_a 即变为 v_a，而 $\left[\frac{p_a v_a^2}{\xi^2}\right]_a$是一个自由度为 $n - t$ 的 χ^2 变量。

所以

$$E(\xi'^2) \approx \frac{\xi^2}{n} E\left[\frac{p_a v_a^2}{\xi^2}\right]_a = \frac{n-t}{n}\xi^2 \tag{14}$$

而 ξ^2 的近似无偏估值为

$$\xi_1^2 = \frac{n}{n-t}\frac{[\lambda_a p_a v_a^2]_a}{[\lambda_a]_a} \tag{$15)_1$}$$

一般地说在实际工作中把各 λ_a 看作近似地相等是可以的，此时上式简化为

$$\xi_2^2 = \frac{[p_a v_a^2]_a}{n-t} \tag{$15)_2$}$$

式中 t 为水准网的独立高差数，而 $n - t = r$ 也就是水准网中的闭合环数。

由(10)，(12)及(15)三式即可解出 ξ^2 及 h_j 之估值 ξ_1^2（或 ξ_2^2）及 h'_j。这些估值都是极近无偏的。

三

从上节的推导可看出在推求 ξ_1^2（或 ξ_2^2）及 h'_j 时是相互为因的，为此，我们采用下列的一种近似求解法。这一解法的近似程度的优劣取决于 p_a 近似值的选取，也就是取决于 ξ^2 近似值的选取，其具体步骤如下：

（1）在依据第一节中所述三条件划分好水准线后，利用已有的同等级的水准资料所算得的 ξ^2 值作为它的近似值，或者在水准网中选取尽可能多的相互独立的环线闭合差(共

r_1 个)，并近似地设各 p 值相等，利用(21)[1,2]式以计算 ξ^2 的近似值 $\xi^2_{近}$。$\xi^2_{近}$ 算得后再代入(10)式即可算得 p_α 之近似值。由本文末节之算例可看出，利用(21)式所算得之 $\xi^2_{近}$ 值是相当好的，而由此所算得的 p_α 值对平差而言可以认为已足够精确了。

(2) 对每一观测量 l_α 给以相应的权 p_α。

(3) 利用间接观测法或条件观测法来进行平差，组成法方程式并答解之以求出 h_j 之最小二乘估值 h'_j 及观测量 l_α 之改正数 v_α。通常利用条件法平差要方便些。

(4) 用所得之 v_α 及 λ_α，p_α 代入到(15)式中以求出 ξ^2 之估值 ξ^2_1 或 ξ^2_2(此时 λ_α 值可不必计算)。

四

本节我们研究是有 r_1 个独立闭合水准环线的情况。为了推证的方便，我们先假定存在有两个独立水准闭合环线 1 及 2，如图 2 所示。于是有两个环线闭合差 δ_1 及 δ_2。

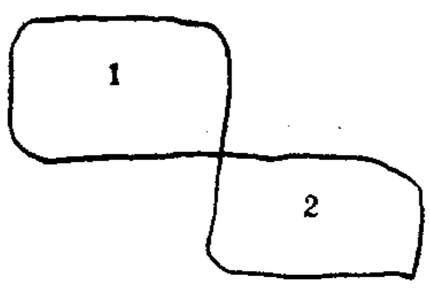


图 2

显然

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= [R_{1i}C_{1i}]_i + \chi_1\\ \delta_2 &= [R_{2i}C_{2i}]_i + \chi_1\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中 R_{1i} 表示环 1 中第 i 条水准线之长，χ_1 表示环 1 中之偶然误差，余可依此类推(按第一节)。对此 (6) 式及 (1) 式可知，独立闭合环线实际上可看作是(1)中高差真值 h 已知为 0 的情况。于是作为上面所推得的公式之特殊情况，我们得到下列各式：

对于 r_1 个独立的闭合水准环线而言

$$\left.\begin{aligned}p_\beta &= \frac{\xi^2}{[R^2_{\beta i}]_i\xi^2 + R_\beta\eta^2} = \frac{\lambda_\beta}{[R^2_{\beta i}]_i},\quad \beta = 1, 2, \cdots, r_1\\ \lambda_\beta &= \frac{[R^2_{\beta i}]_i}{[R^2_{\beta i}]_i + R_\beta\theta},\quad \theta = \frac{\eta^2}{\xi^2}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\xi^2_3 = \frac{[\lambda_\beta p_\beta \delta^2_\beta]_\beta}{[\lambda_\beta]_\beta} \tag{18}$$

计算步骤同上节，但要注意这儿的 β 代表的是闭合环号，故 p_β 是对第 β 环的闭合差来说的。

如果我们近似地设各 λ_β 及 p_β 相等，且

$$p_\beta = p = \frac{\xi^2}{[R^2_{\beta i}]_m\xi^2 + R_m\eta^2} \tag{19}$$

其中

$$[R^2_{\beta i}]_m = \frac{[[R^2_{\beta i}]_i]_\beta}{r_1}\quad R_m = \frac{[R_\beta]_\beta}{r_1} \tag{20}$$

---

1) 见第四节。

2) 本文之各估值式虽然是从间接观测法推得的，但由于不同的平差方法对平差结果的改正数没有影响，因此我们亦可用条件法求出各 v_α 之值。事实上从条件平差的角度出发，我们亦可推得各估值式。这里我们不再赘述。

于是由(18)及(19)式可得

$$\frac{\xi^2}{p}=\frac{[\delta_\beta^2]_\beta}{r_1}=[R_{\beta i}^2]_m\xi^2+R_m\eta^2,$$

顾及(20)式，得

$$\xi_0^2=\frac{1}{[[R_{\beta i}^2]_i]_\beta}\{[\delta_\beta^2]-[R_\beta]\eta^2\} \tag{21}$$

利用(21)式可计算水准网中 ξ^2 的近似值。

五

本节先来计算上述各个方差估值的精度，然后再将本文所得之公式与拉勒孟第二式来作一比较。

一般来说各 R_{ai} 近似相等的条件是容易满足的，此时各 λ_α 近似相等。因此上述各 ξ^2 之估值均为期望为 ξ^2，自由度为 $r=n-t$ 的 S^2 分布。于是我们直接地可得

$$D(\xi_1^2)\approx D(\xi_2^2)=\frac{2}{r}(\xi^2)^2 \tag{22}$$

$$D(\xi_3^2)\approx\frac{2}{r_1}(\xi^2)^2 \tag{23}$$

由此可见，以上的 ξ_1^2，ξ_2^2 及 ξ_3^2 的精度基本上是一致的。但严格说来各 λ_α 间不可能绝对相等，所以估值的精度应该说是以 ξ_1^2 为最佳，而从计算的工作量上来说 ξ_2^2 则要少不少。因为它既不要算各 λ_α 之值又可以直接地从 $[p_\alpha v_\alpha^2]$ 来求出 ξ^2 之估值而无需再算 $[\lambda_\alpha p_\alpha v_\alpha^2]$。

为了与拉勒曼第二式进行比较，我们对 $(15)_2$ 式进行一些改变，此时假定各 p_α 之间近似恒等，可得

$$\frac{\xi^2}{p}=\frac{[v_\alpha v_\alpha]_\alpha}{r}=[R_{ai}^2]_m\xi^2+R_m\eta^2 \tag{24}$$

而

$$[R_{ai}^2]_m=\frac{[[R_{ai}^2]_i]_\alpha}{n}\qquad R_m=\frac{[R_\alpha]_\alpha}{n} \tag{25}$$

于是

$$\xi^2=\frac{1}{[[R_{ai}^2]_i]_\alpha}\left\{\frac{n[v_\alpha v_\alpha]_\alpha}{r}-[R_\alpha]\eta^2\right\} \tag{26}$$

至于拉勒孟公式，则在采用了本文之符号后为

$$\xi^2=\frac{1}{[R_\beta^2]_\beta+R_{外}}\left\{\frac{[\delta_\beta^2]_\beta+\delta_{外}^2}{2}-([R_\beta]_\beta+R_{外})\eta^2\right\} \tag{27}$$

式中 β 表示水准网中的小环号，$R_{外}$、$\delta_{外}$ 表示与外环相应的 R 及 δ 值。对此 (26)、(27) 二式可看出拉勒孟第二式是不够合理的。拉勒孟第二式的不合理性首先表现在它所选取的误差模型上。它把一个闭合环看作是一条水准线，在这一水准线内，系统误差取相同的值。由于闭合环的距离过长，就会使许多系统误差相互抵消而使系统方差的数值估计偏

低。拉勒孟第二式的第二个不合理性则表现在没有全盘考虑各环线闭合差之间的相关性上。一般来说后者的影响较前者为小。如果我们忽视后者而单就前者来考虑其影响，则可得

当

$$R_\beta \approx mR_{ai} \text{ 时，则对 } \beta \text{ 闭合差来说}$$

$$[R_{ai}^2] \approx mR_{ai}^2 \approx \frac{R_\beta^2}{m},$$

式中 $[R_{ai}^2]$ 表示对 β 环中的各 R_{ai}^2 求和，所以

$$R_\beta^2 \approx m[R_{ai}^2] \tag{28}$$

于是用拉勒孟第二式所算得之 ξ^2 值大约为正确值的 $\frac{1}{m}$ 左右。

六

(1) 我们对一个全长为 26801 公里的水准网进行了一次试算，网中共有闭合环 23 个，水准路线 60 条。该项资料观测时间较长，所用细则亦不完全统一，但其中绝大部分是按 1954 年中央水利部所颁布的 II 等细则来进行的。计算中水准线一般依据大段往返来划分。η^2 值则取自文献 [1] 中的算例二。由于这二个算例中资料所采用的细则及观测质量基本相同，因此可以认为这一数据对本算例而言是相当可靠的。

为了取得 ξ^2 的近似值，在网中选取了 11 个相互独立的闭合环，用 (21) 式来进行计算，结果得到

$$\xi_{近}^2 = 0.0471 \text{ 毫米}^2。$$

由 $\xi_{近}^2$ 及 η^2 值依(8)及(10)式算得 λ_α 和 p_α，然后再依最小二乘法平差水准网求出各观测量平差后之 v_α 或 $[pv_\alpha v_\alpha]$，最后用所得之 v_α，λ_α 及 p_α 代入 $(15)_1$ 式或直接由 $[pv_\alpha v_\alpha]$ 代入 $(15)_2$ 而求出 ξ^2 的估值，得

$$\xi_1^2 = \frac{n}{n-t}\frac{[\lambda_\alpha p_\alpha v_\alpha^2]_\alpha}{[\lambda_\alpha]_\alpha} = 0.0541 \text{ 毫米}^2$$

$$\xi_2^2 = \frac{[p_\alpha v_\alpha^2]}{n-t} = 0.0538 \text{ 毫米}^2$$

由上例可见，通常假设各 λ_α 近似相等是可以的，此时计算工作可大大简化。另外，还可以看出利用(21)式来计算 $\xi_{近}^2$，所得结果也是相当好的，其精度已完全满足平差时权之用了。

最后，我们用拉勒孟公式来进行一次 ξ^2 值的计算。在本算例中，平均地说来，$R_\beta \approx 20R_{ai}$，而用拉勒孟公式所得之 ξ^2 值为

$$\xi_{拉}^2 = 0.00248 \text{ 毫米}^2。$$

它大约为 ξ^2 值的 $\frac{1}{20}$，其结果与我们在第五节中之论述基本相符。

本算例的资料由长江流域规划办公室提供，计算工作承杜慧君同志协助完成。作者

在此致以衷心感谢。

（2）本文所提的方法一方面解决了水准测量每公里往返中数系统方差的推求问题，另一方面也给我们提供了一个水准网平差的严密方法。

参 考 文 献

[1] 周江文：误差理论，水准测量误差的统计公式，测绘出版社，1979年。

ESTIMATION OF SYSTEMATIC VARIANCE OF THE AVERAGE OF FORE AND BACK LEVELLING

Zhuang Kunyuan

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the principle of Most-Likelihood is applied to the estimation of systematic variance of the average of fore and back levelling ξ^2, and to its unbiased estimation ξ_1^2 (or ξ_2^2). The computation program is detailed in it, too. Eventually, the unreasonableness of Lallemand formulae is discussed. Its result is about 1/m of the correct one. The computation example proves in our conclusions.

第4号 测量与地球物理集刊 No. 4
1982年 ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA 1982

利用 TQ-16 机电算观测权的估值*

蔡 喜 楣

摘 要

本文讨论了在 TQ-16 机上用 BCY 语言电算观测权估值[1]的方法、程序设计，以及某独立三角网的试算结果和分析。本算例结果表明，估算所得的一、二等三角网的权比（2.7）与菲列罗公式算出的权比(2.6)很接近；近似解法也能得到较好的结果。

一、前 言

在测量平差中，权是用以权衡观测值的精度高低和在平差中给予的信赖程度；当不同精度或不同性质的观测参加同一平差时，必须知道它们的权。而观测值的权与相应于它的方差成反比。

F. R. Helmert，用余差表示的方差估式，是 Minque 估值。本文按照周江文教授的论文[1]，讨论用 BCY-TQ_{16} 算法语言在 TQ-16 机上电算观测权的估值，及其计算结果的分析。

二、计 算 方 法

(1) 法方程的组成与解算

首先利用矩阵的转置，得

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1}$$

显然 $n \times m$ 矩阵的转置是 $m \times n$ 矩阵。

再利用矩阵 A' 和矩阵 P 的乘积，记为 $A'P = B$。换句话说，用权 P 右乘转置后的误差方程组的系数矩阵 A'。若 P 为对角形矩阵，则

$$A'P = \begin{pmatrix} p_1a_{11} & p_2a_{21} & \cdots & p_na_{n1} \\ p_1a_{12} & p_2a_{22} & \cdots & p_na_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ p_1a_{1m} & p_2a_{2m} & \cdots & p_na_{nm} \end{pmatrix} = B_{mn} \tag{2}$$

* 1981 年 3 月收稿。

然后将(2)式左乘未知量的系数矩阵,得

$$C = B_{mn}A_{nm} = (C_{ij})_{mm} = \left(\sum_{k=1}^{n} Pa_{ik}a_{kj}\right)_{mm} \tag{3}$$

显然，乘积矩阵 C 具有与矩阵 B 一样的行数和与矩阵 A 一样的列数，即矩阵 C 为 $m \times m$ 阶。这里要注意,矩阵的乘法运算不满足交换律。同样,可进行 BL 的乘积,即

$$\begin{pmatrix} p_1a_{11} & p_2a_{21} & \cdots & p_na_{n1} \\ p_1a_{12} & p_2a_{22} & \cdots & p_na_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_1a_{1m} & p_2a_{2m} & \cdots & p_na_{nm} \end{pmatrix}_{mn} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}_{n1} = (BL)_{m1} \tag{4}$$

这样,将(3)和(4)式应用于两组观测列，就得两组同阶的 $m \times m$ 方阵和 $m \times 1$ 的列阵。

这时,利用矩阵加法,则有

$$CX = A_1'P_1L_1 + A_2'P_2L_2 \tag{5}$$

式中

$$C = C_1 + C_2,$$

$$C_1 = A_1'P_1A_1, \qquad C_2 = A_2'P_2A_2,$$

$$b = A_1'P_1L_1 + A_2'P_2L_2。$$

这样,就得到整体的法方程组。基于法方程组的特点，因此(5)式是非退化的、线性对称的、正定二次型。

现在用矩阵理论来研究线性方程组的求解问题。

把法方程组写成下列形式

$$CX = b \tag{6}$$

为了便于研究，把上式中矩阵 C 称为方程(6)的系数矩阵；而把由 C 和 b 组成的矩阵 $(C:b)$ 称为矩阵 C 的增广矩阵,并用符号 $\bar{C}$ 表示,即

$$\bar{C} = (C:b) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m}\ b_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m}\ b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} b_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

显然,每一个线性方程组(法方程组属于此例)均可由它的增广矩阵来表达。

本文采用全主元消去法解方程组(6)。这就是说,通过施行初等行变换，将增广矩阵 $\bar{C}$ 化为如下的等价矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & d_1 \\ & 1 & & d_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & d_m \end{pmatrix},$$

由此便得到方程组的解，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}。$$

然后，将求得的 x_i 分别代入两组误差方程即得 V_{i0} 最后，求出 $V_1'P_1V_1$ 和 $V_2'P_2V_2$。

如果欲求观测权的近似解，那么根据已知的 $V'PV$ 就可以按下列公式算出方差 σ_{01}^2 和 σ_{02}^2 的估值[1]：

$$\begin{aligned} E(V_1'P_1V_1) &= \{n_1 - 2SPK_1 + SP(K_1K_1)\}\sigma_{01}^2 + SP(K_1K_2)\sigma_{02}^2 \\ E(V_2'P_2V_2) &= SP(K_1K_2)\sigma_{01}^2 + \{n_2 - 2SPK_2 + SP(K_2K_2)\}\sigma_{02}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

式中 SPK_1，SPK_2 可由下式直接从整体和分组法方程组的系数矩阵中近似地得出

$$\begin{aligned} SPK_1 &\sim \left[\frac{c_{1i}}{c_i}\right] \qquad SPK_2 \sim \left[\frac{c_{2i}}{c_i}\right] \\ SPK_1K_1 &\sim \left[\frac{c_{1i}^2}{c_i^2}\right] \qquad SPK_2K_2 \sim \left[\frac{c_{2i}^2}{c_i^2}\right] \\ SPK_1K_2 &\sim \left[\frac{c_{1i}c_{2i}}{c_i^2}\right] \quad i = 1 \text{ 至 } m \end{aligned} \tag{9}$$

从而由 $\hat{\sigma}_{01}^2$ 和 $\hat{\sigma}_{02}^2$ 求得权的近似解。

(2) 逆阵 c^{-1} 的求解

观测权的估值可以采用严密的和近似的两种解法[1]。为了进行严密的解算，必须对法方程的系数矩阵进行求逆。

我们知道，对于任意的 m 级方阵 C 都有

$$CI = IC = C$$

这里 I 是 m 级单位矩阵。相仿地，也可以说，如果有 m 级方阵 D，使得

$$CD = DC = I。$$

那么，D 就称为 C 的逆矩阵，记为 C^{-1}。

这里，利用对矩阵施行初等行变换来求它的逆阵。也就是把一个 $m \times m$ 阶单位矩阵 I 写在 C 的右边，这样就把 C 扩充成一个 $m \times 2m$ 阶的长方矩阵。然后对它施行初等行变换，这样，最终结果就把 C 变换成 I，而把 I 变换成了 C^{-1}。

(3) SP 的计算及校核

设法方程的系数矩阵 C 的特征矩阵为 $\lambda I - C$，以特征矩阵的元素作行列式，得

$$f(\lambda) = |\lambda I - C| \tag{10}$$

其中 $C = (C_{ij})$ 是 m 阶方阵，I 是单位阵，λ 为参变量。则有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{mm} \tag{11}$$

通常数学上称上式所定义的数值为矩阵 C 的迹，用符号 SPC 表示，即

$$SPC = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} \tag{12}$$

至此，只要在(8)式中使

$$K_1 = C^{-1}C_1 \qquad K_2 = C^{-1}C_2 \tag{13}$$

就可求得观测权的严密解。

电算的整个校核工作，直接用法方程组的系数矩阵作检验。因为 $C_1 + C_2 = C$，两边左乘 C^{-1} 则

$$C^{-1}C_1 + C^{-1}C_2 = C^{-1}C = I \tag{14}$$

三、程序设计

本文源程序依前述公式和计算方法，根据矩阵理论用 BCY-TQ16 算法语言编写在 TQ-16 机上进行。编写时尽量利用机器中存有的标准程序，故源程序简短。但其缺点是占用单元多，又加机器内存容量小，故造成变界场分配超过数据容量。因此这里按计算步骤采取分段进行计算。这样，本程序对中小型电子计算机来讲，有待进一步完善。

下面给出源程序设计的粗框图(见图 1)。

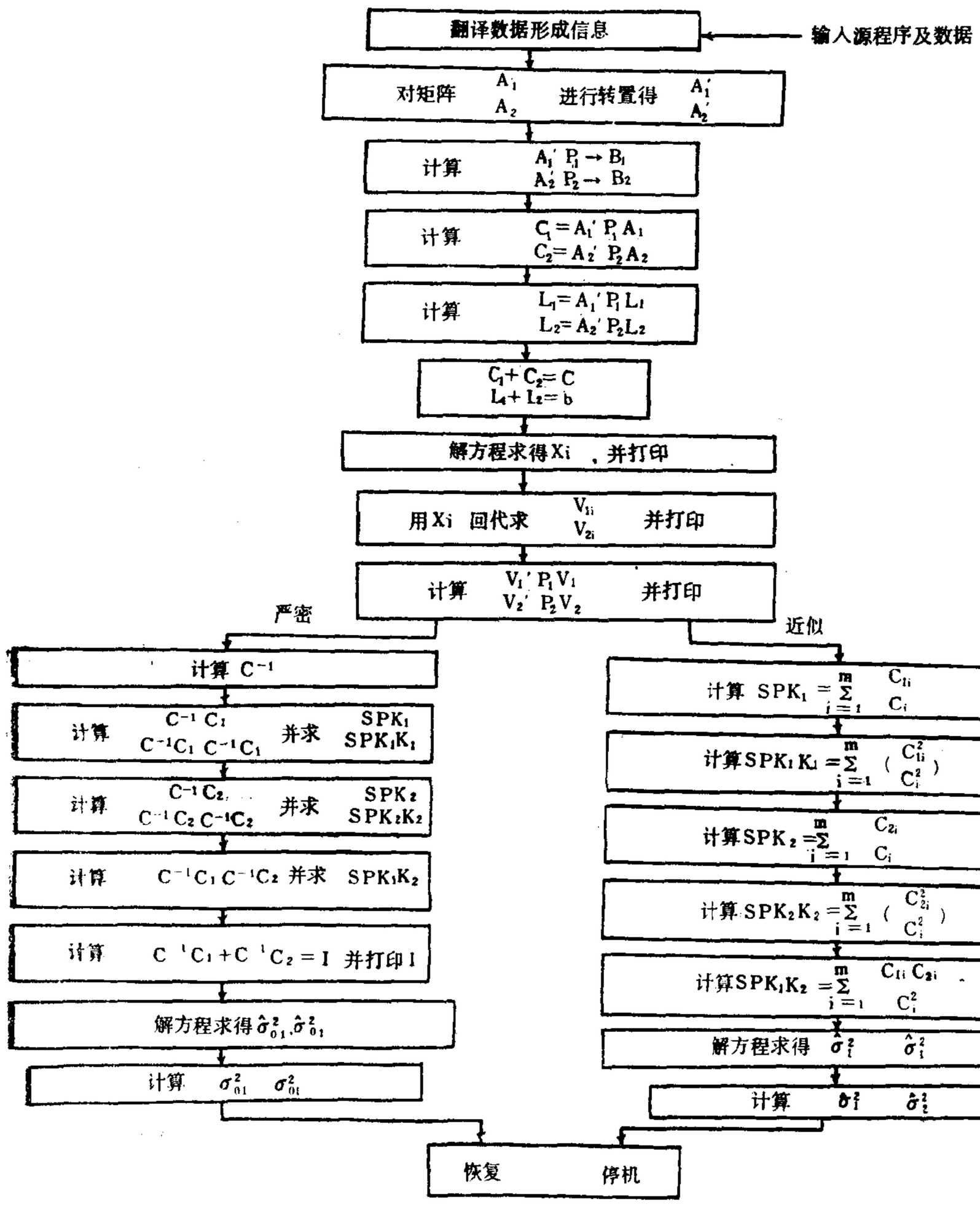


图 1

四、计算结果与分析

为了进行试算，本文选择了一个由一、二等三角点联合构成的某独立三角网。如图 2 所示，它包括一条一等起始边，8 个一等点，23 个二等点。其中，三角点 8 和 15 为固定

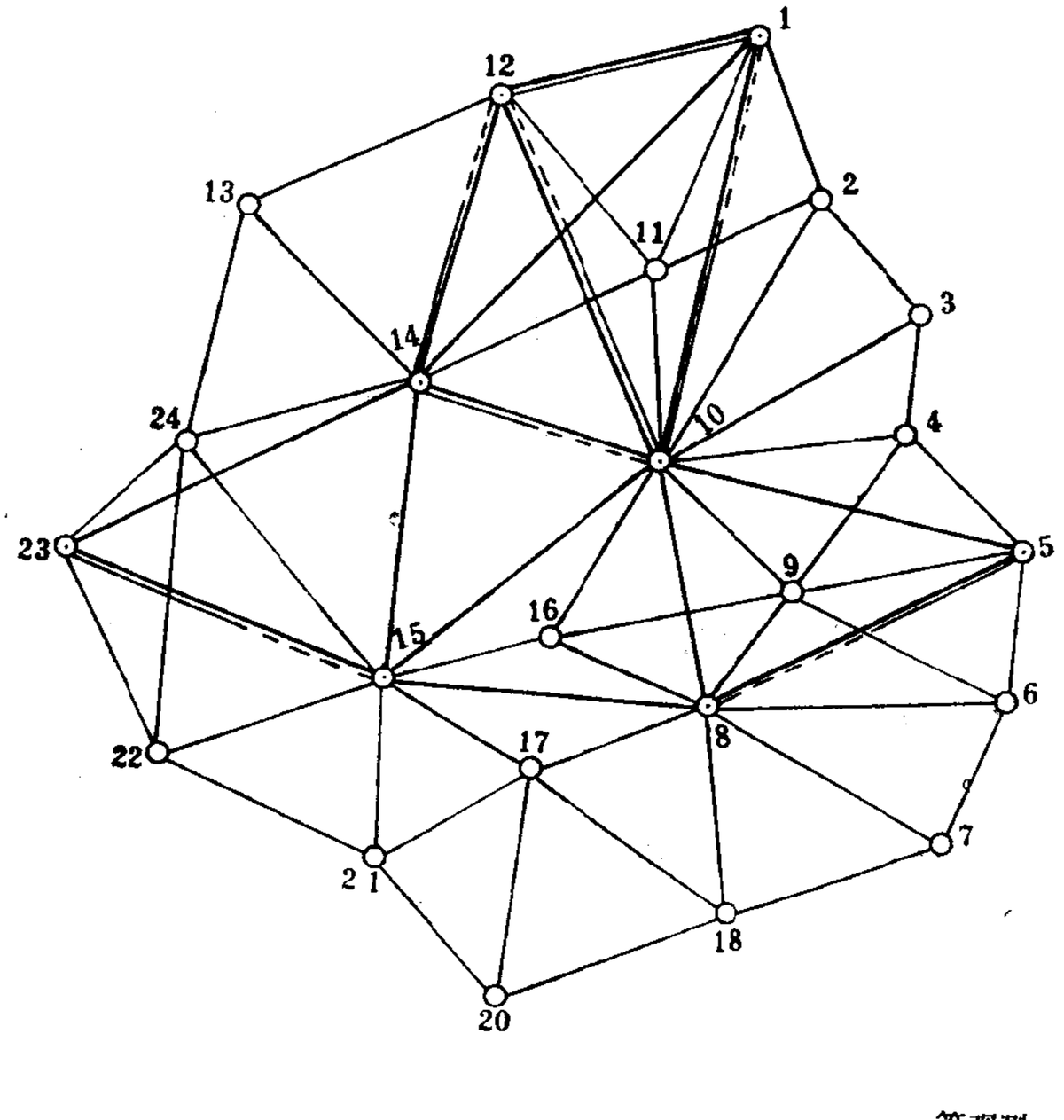


图 2

点，有起始边长和固定方位角。在三角网中，一等点观测的方向数 $n_1 = 28$，二等点观测的方向数 $n_2 = 98$；一等观测的权 $P_1 = 2.6$，二等观测的权 $P_2 = 1.0$。通常用间接观测平差法进行三角网平差时，是以待定点的坐标为未知量，通过平差直接求出各待定点坐标的改正数和定向改正数。这里，坐标改正数和定向改正数的个数之和 $m = 73$。

这样，将一等观测视为第一组，其误差方程组的常数项阵 L_1 为 28×1 阶，将二等观测视为第二组，其误差方程组的常数项阵 L_2 为 98×1 阶；未知数阵 x 为 73×1 阶。

这里，算例采用严密的和近似的两种解法。计算公式按第〈二〉节的(8)，(9)，(13)式。由于 TQ-16 机内存容量小，整个算例按计算步骤采取分段进行。现将某独立三角网观测权的严密解和近似解的结果列于表 1。

根据表 1 试算结果，可以得出如下几点初步结论：

(1) 周江文教授“观测权的估值”一文中的解法，在理论上是严密的，可以直接在平差中求出权比，公式有明显的规律性，便于用电子计算机计算。

表 1 某独立三角网观测权的计算结果

严密		近似	
$E(V_1'P_1V_1)$	5.240005		
$E(V_2'P_2V_2)$	17.335036		
SPK_1	15.474049	SPK_1	13.701685
SPK_1K_1	13.100211	SPK_1K_1	11.056641
SPK_2	57.527549	SPK_2	59.298313
SPK_2K_2	55.155308	SPK_2K_2	56.653271
SPK_1K_2	2.372244	SPK_1K_2	2.645042
$\hat{\sigma}_{01}^2$	0.415883	$\hat{\sigma}_{01}^2$	0.346301
$\hat{\sigma}_{02}^2$	0.429091	$\hat{\sigma}_{02}^2$	0.455368
$\hat{\sigma}_{01}^2/P_1$	0.159955	$\hat{\sigma}_{01}^2/P_1$	0.133193
$\hat{\sigma}_{02}^2/P_2$	0.429091	$\hat{\sigma}_{02}^2/P_2$	0.455368
一、二等权比 2.7:1		一、二等权比 3.4:1	

(2) 程序用某独立三角网的两组互相独立的误差方程经过试算，结果良好。将法方程组的电算资料代入人工手算的法方程组进行对比，自由项最大差异在 ±0″.0002 范围以内。

(3) 观测权比值的严密解 2.7:1.0 和根据菲列罗公式采用的权比 $P_1:P_2 = 2.6:1$ 很接近(表 1，$\hat{\sigma}_{01}^2 \approx \hat{\sigma}_{02}^2 \approx \hat{\sigma}_0^2$)。

(4) 在本算例中，近似解法(权比 3.4:1)在要求不高时也可采用。

本文算例的程序设计得到中南电力设计院计算组胡泽施、杨思尧等同志的指导，在此谨表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] 周江文：观测权的估值，误差理论，测绘出版社，1979 年，第 1—5 页。
[2] 武汉测绘学院大地系测量平差基础编写组；测量平差基础，测绘出版社，1978 年。
[3] 崔希璋、陶本藻；数学期望及方差，测绘通报，第三期，1979 年，第 40—46 页。

ESTIMATING WEIGHTS OF OBSERVATIONS USING TQ-16 ELECTRONIC COMPUTER

Cai Ximei

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the evaluation method and programming of calculating the weights of observations on TQ-16 computer with BCY language are discussed and the results for a free trianglation net analyzed. The calculated result shows that the weight ratio (2.7) estimated for the first-order and second-order triangulation nets will be near to that (2.6) calculated by Ferrero's formula. Good result can be also got with approximate solution.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

由武昌时辰站光电中星仪（WP）观测所得 464 颗星的赤经改正*

夏炯煜　顾秀莲

提　　要

本文统计分析 WP 1976—1979 年的 18180 星次的观测资料，并加上由文献 [6] 所得的星等和光谱型改正，得出 464 颗星的赤经改正。由于 WP 的观测纲要全部选自 CTC 星表，因此，这也可以看作是对 CTC 星表的检验，由结果可知，大部分 CTC 星的精度较高，有少量星由于只依靠一、二架仪器的观测，其赤经精度稍差，为此，本文提出了改进中天星表的建议。

一、概　　况

我国各天文台都曾根据光电中星仪测时资料进行所观测星的赤经改正[1]—[4]。在此基础上 1974 年陕西天文台综合了上海（包括海南站）、北京、南京及陕西各台的六架中星仪（其中一架目视中星仪）1965—1973 年间的 76847 星次的观测资料，出版了《我国授时赤经星表》，简称 CTC 星表具有较高的精度，绝大部分星的内部精度优于 ±3 毫秒。

考虑到我站位于我国中部，使用 CTC 星表十分有利，因此，WP 的观测纲要全部取自 CTC 星表，共 464 颗星。自 1976 年观测以来到 1979 年底共观测 18180 星次。分析这些观测，可以了解 CTC 星表在赤纬 10°—50° 区域内部分星的实际精度及可能的系统差。

二、资料处理及结果

按照通常的公式，中天观测的某星的赤经改正为 $d\alpha = \bar{V} + G$，$\bar{V}$ 为该星的观测残差的均值，G 为该星所在组的组间差。对 $\bar{V}$ 的计算，一般是对每一个 V 值给权，然后取权平均，考虑到 WP 的观测内精度差别不大，为简单起见，我们采用了等权平均，又由于各仪器的差异，往往存在星等差、光谱差、方位误差等系统差。我们根据资料分析，得出光谱型差 V_{sp} 和星等差 V_m 为

$$V_{sp} = -0.800 + 0.017(\lambda - 5700A^0)\ (\text{毫秒})$$

$$V_m = -34.2 + 15.4m - 1.64m^2\ (\text{毫秒})$$

* 1981 年 3 月收稿。本文在写作过程中，参考了我国上海、陕西、北京、南京等天文台的有关资料，特此致谢。

此处 m 表示星等，对方位差的系统改正，由于 CTC 的 $\Delta\alpha_\delta$ 未知，没有进行改正，因此实际计算赤经改正的公式为

$$d\alpha = \bar{V} - V_{sp} - V_m + G$$

表 1 为 G 值，它是由 1979 年的观测用链锁法解得的，$d\alpha$ 值列在附表中，各星的详细资料 (CTC、FK4 和 GC 星号、星等、光谱型及赤纬等)见[6]。

表 1 WP 的组间差 （单位：0.1 毫秒）

组号	G	组号	G	组号	G	组号	G
1	42	5	−23	9	−17	13	−9
2	−17	6	−11	10	−8	14	−27
3	31	7	30	11	−15	15	27
4	−3	8	−1	12	−15	16	23

三、讨 论

(1) 观测资料的精度

WP 观测的 464 颗星的平均观测次数为 39.1 各星残差平均值的精度分布见表 2。

表 2 WP 各星残差平均值的精度分布(单位：毫秒)

	$\lvert M\bar{V}\rvert \leqslant 3.0$	$3.1 \leqslant \lvert M\bar{V}\rvert \leqslant 3.5$	$3.6 \leqslant \lvert M\bar{V}\rvert \leqslant 4.0$	$\lvert M\bar{V}\rvert \geqslant 4.1$
星数 n	378	61	15	10
百分比%	81.5	13.1	3.2	2.2

由表 2 可见，WP 的观测资料精度还是比较高的，亦即资料有一定的可靠性，可以用来分析部分 CTC 星表的精度。

(2) CTC 星表的精度分析

可以设想，WP 的观测是对 CTC 星表部分星的检验，为此，我们统计 464 颗星的赤经改正值的绝对值列于表 3。

表 3 $\lvert d\alpha\rvert$ 的统计 （单位：毫秒）

$\lvert d\alpha\rvert$	$\lvert d\alpha\rvert \leqslant 3.0$	$\lvert d\alpha\rvert \leqslant 7.8$	$\lvert d\alpha\rvert > 7.8$
星数 n	170	357	107
百分比%	36.6	76.9	23.1

表中的 3 毫秒和 7.8 毫秒是以 CTC 星表的内部精度和它的 2.6 倍为根据的。由表 3 可见，仅 107 颗星的改正值的绝对值超过 7.8 毫秒，进一步研究这 107 颗星的观测仪器数，结果列于表 4。

不言而喻，对某星的观测仪器越多，它的赤经改正值愈精确，由表 4 可见，WP 观测得到的赤经改正偏大的星中，有 68.3% 仅一架或二架仪器所测，因此，这些星的赤经改正的精度较低。这一情况证明了 WP 所得到的赤经改正结果还是较好，可以反映出 CTC 星

表 4　107 颗星的观测仪器数

仪器数	1	2	3	4	5	6
星数	48	25	13	13	4	4
%	44.9	23.4	12.1	12.1	3.7	3.7

表的赤经改正精度。

（3）CTC 星表的系统差

按照通常的方法，由 WP 的 464 颗星计算了 CTC 星表的 $\Delta\alpha_\alpha$，列于表 5。

表 5　$\Delta\alpha_\alpha$

0.5 小时	+3.0 毫秒	6.5 小时	−2.8毫秒	12.5小时	−2.0毫秒	18.5小时	−1.6 毫秒
1.5	+2.7	7.5	−1.9	13.5	−0.8	19.5	−3.1
2.5	−2.1	8.5	−2.1	14.5	+0.2	20.5	−3.9
3.5	+3.3	9.5	+1.3	15.5	−1.9	21.5	+3.8
4.5	+1.2	10.5	+2.2	16.5	−3.4	22.5	+0.3
5.5	−1.6	11.5	−0.1	17.5	−1.4	23.5	+1.0

四、建　　议

通过 WP 观测所得资料分析，为了进一步作中天赤经星表，我们建议：

（1）各台站之间可协调观测纲要，使被观测星的仪器尽可能多和均衡；

（2）各台站应加强系统差（如星等、光谱、方位误差等）的研究，为此，可开展两个台站之间的联合观测。

附表 464 颗星的赤经改正（历元 1975.0）　（单位：0.1毫秒）

组号	序号	星号		$d\alpha$	组号	星号		$d\alpha$
		CTC	FK 4			CTC	FK 4	
I	1	7	1	117	II	72	1045	27
	2	8	4	44		75	2112	29
	3	10	7	73		77	1047	−49
	4	13		−71		79		−154
	5	15	1006	54		82	1050	−75
	6	17	1009	3		84		31
	7	20		−35		86	64	7
	8	23		40		90		68
	9	25	2033	−46		96		−16
	10	27	18	−28		99		−100
	11	29	20	138		102	74	−3
	12	30	2044	76		103	75	22
	13	33	25	38		106	2153	−103

续上表

组号	序号	星号		$d\alpha$	组号	星号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
I	14	34	27	33	II	110		0
	15	35	1021	89		113	1063	−40
	16	39		31		114	2161	−26
	17	40	2059	58		116	2164	107
	18	42	1023	−76		119	1068	−136
	19	44		119		121	2171	102
	20	46	1028	67		124		100
	21	48	2071	42		127		−78
	22	52	43	68		129	89	−44
	23	53	2082	36		132	2187	−77
	24	56		84		136		1
	25	59	45	89		138		−44
	26	60	1035	11		139	100	−55
	27	63	2096	46		142	2204	−10
	28	66		79		145		16
	29					149	1082	−53
	30							
	31							

组号	序号	星号		$d\alpha$	组号	星号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
III	1	153	109	27	IV	232	1125	−3
	2	154		29		233	2338	82
	3	157	1088	−49		237	2345	−37
	4	158	114	−154		240	2348	−89
	5	160	1089	−75		242		11
	6	162	2230	31		244		−9
	7	165	2234	7		247	1133	−15
	8	169	2240	68		252	2365	−82
	9	173		−16		254	2368	12
	10	174	124	−100		256	181	84
	11	176	1098	−3		259		31
	12	180		22		261	1137	72
	13	182	1103	−103		263	1140	47
	14	184	131	0		265	2383	22
	15	186	136	−40		269	2391	−191
	16	188	139	−26		271		30
	17	194		107		274	1145	30
	18	198	144	−136		277		−6
	19	200		102		282		−120
	20	204	148	100		284	1148	−31
	21	206		−78		286	2412	−61
	22	210	1112	−44		287	1151	−34

续上表

组号	序号	星　号		$d\alpha$	组号	星　号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
III	23	213	1115	−77	IV	289	2415	18
	24	215	2300	1		292	211	43
	25	217		−44		293	2424	7
	26	220		−55		295		16
	27	223	158	−10		296	216	−13
	28	224	162	16		300	2435	18
	29	227	2325	−53		301	221	−109
	30	228	164			302	1158	−5
	31					305		−62

组号	序号	星　号		$d\alpha$	组号	星　号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
V	1	315	2465	−125	VI	390	1195	−16
	2	317		−151		393	2592	10
	3	319	2471	77		396	2597	−2
	4	320	1118	−8		399	294	−12
	5	322	2481	107		402	1199	26
	6	325		−76		404		22
	7	326	241	6		406		−51
	8	330		76		407	1207	60
	9	332	2496	−141		409	2614	−8
	10	333	2500	8		412		−37
	11	336	2504	−96		414	1211	−11
	12	339	250	−11		415	305	−47
	13	340		95		416		81
	14	343	254	−26		417	2630	36
	15	346	1176	0		422	2633	−5
	16	348	2525	−73		424	2641	−21
	17	350	261	−32		426	312	36
	18	352		−52		427	1217	2
	19	357		−116		428	314	2
	20	359	1182	−76		430	2652	1
	21	362		−118		433	1222	−74
	22	366		−13		435	320	−16
	23	368	274	−1		436		12
	24	369	1188	−104		440		−23
	25	371		32		441	1225	26
	26	373	2563	104		442	1228	−82
	27	376	279	29		445	328	25
	28	379	1191	−132		447		−51
	29	382	2572	38		450	27	−180
	30	384	286	71		452	2706	−117
	31							

续上表

组号	序号	星 号		$d\alpha$	组号	星 号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
VII	1	460	1237	100	VIII	530		−175
	2	462	1239	58		531	1275	−28
	3	467		18		533	405	22
	4	470	2738	16		535	407	−4
	5	473	352	72		538	2863	44
	6	475	1244	65		539	412	20
	7	477	2751	−57		540		−21
	8	481	2756	123		541	1282	69
	9	483	360	51		544	2880	−20
	10	485	2766	−42		546	2882	87
	11	489		−174		549	2889	−96
	12	491	1251	52		552		50
	13	493	367	110		555	423	−2
	14	495	2785	22		556	424	−3
	15	497	371	−205		558	1293	−68
	16	500	347	160		560	2908	−17
	17	501	2803	−148		563	2913	−55
	18	504	2807	156		567		−80
	19	508	379	94		569	2923	−67
	20	510	2817	15		570		160
	21	511		−32		573		35
	22	513	384	61		576	2936	−5
	23	516		62		579	441	−32
	24	518	1267	−46		580	1304	4
	25	521		−18		583	2946	101
	26	524	390	80		586	1307	−5
	27	526		98		589	1308	−2
	28					591	1310	−7
	29							
	30							
	31							

组号	序号	星 号		$d\alpha$	组号	星 号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
IX	1	600	1313	132	X	661		−141
	2	602	2978	0		662		85
	3	607	2983	38		664	3089	39
	4	609	2984	−72		666	1358	−44
	5	613	2987	−60		668	3096	−33
	6	615	2993	−19		670	3102	−42
	7	616	461	79		671	513	−29
	8	617		26		673		37
	9	620		5		674	3113	−54

续上表

组号	序号	星　号		$d\alpha$	组号	星　号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
IX	10	621	1322	−48	X	675	517	36
	11	624	3007	−175		680	1358	0
	12	626	3012	−80		681	522	−29
	13	628	1326	−25		684		−106
	14	630	1327	−184		687	1470	−4
	15	632		−14		689	3136	−8
	16	633		11		690	3139	24
	17	634	1332	−10		693	3142	20
	18	636	3027	82		696	3144	39
	19	640	3039	−17		698	535	16
	20	642	1337	−49		699	1380	−2
	21	645	3049	−8		700	3160	40
	22	647	492	102		702		17
	23	650		89		706	3166	120
	24	651	494	37		709		−111
	25	653	1346	45		712	1386	−59
	26	656	3072	−95		714		81
	27	657	1349	−4		715		66
	28	658		−82		718	1392	79
	29					719	3182	−13
	30							
	31							

组号	序号	星　号		$d\alpha$	组号	星　号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
XI	1	722	557	−4	XII	790	621	−20
	2	727		54		791	3314	−117
	3	730	3201	88		794	3323	−83
	4	732	563	−92		795	626	42
	5	733	1400	−82		796		−147
	6	736		−10		799	3336	74
	7	739	570	11		802		−83
	8	740	572	4		804	1441	16
	9	742	573	−33		806		18
	10	744	576	−28		809	634	−39
	11	746		−65		811	3356	81
	12	747	580	34		814	635	81
	13	750		−129		820	3365	−119
	14	753	3249	−16		825	3369	−86
	15	755	583	−24		826	641	55
	16	756	584	−18		828		−50
	17	760	1414	9		830	1454	−62
	18	762		−28		833		−123

续上表

组号	序号	星号		$d\alpha$	组号	星号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
XI	19	763	593	8	XII	836	3389	−40
	20	765	3264	−120		838	1460	−8
	21	767		−87		840	1462	40
	22	770	1423	−9		843	3397	129
	23	771	3279	−72		845	663	−24
	24	775		27		846		69
	25	777	3287	20		850	667	−62
	26	779	608	−63		852		−38
	27	782	3294	−26		855		−18
	28	785	613	10		856	1468	−7
	29	786	3303	−27		859	674	−41
	30					860	1469	−57
	31							

组号	序号	星号		$d\alpha$	组号	星号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
XIII	1	866	681	−55	XIV	945		−76
	2	868	3448	−33		946	3570	−14
	3	872	684	14		950		203
	4	873		66		952	780	−41
	5	876		30		955	743	−19
	6	878	690	−48		959	3584	−94
	7	880	1479	−40		964		−65
	8	882		−36		965	1521	−48
	9	884		55		966	3594	−168
	10	886		15		968	1523	−63
	11	890		−69		970		15
	12	894		75		973	1611	−93
	13	896	1488	7		974	1525	−67
	14	899		−41		976		93
	15	903		78		979	757	−69
	16	905	3506	−47		982	760	−54
	17	909		−231		984	3627	−59
	18	910	713	−34		987		−187
	19	913	3518	−1		989	3634	10
	20	917	716	−73		992	1534	−24
	21	918	719	−18		996	768	−70
	22	922	3532	24		1000		−30
	23	924		5		1003	1539	−103
	24	925	724	−83		1006	3655	−36
	25	928		42		1008	3657	−53
	26	933	3550	−47		1011		−118
	27	935	3554	−35		1013		19

续上表

组号	序号	星　号		$d\alpha$	组号	星　号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
XIII	28	936	1508	−78	XIV	1015		−3
	29					1017	786	−35
	30					1018	788	9
	31							

组号	序号	星　号		$d\alpha$	组号	星　号		$d\alpha$
		CTC	FK4			CTC	FK4	
XV	1	1028		118	XVI	1093		87
	2	1031	797	55		1096		−33
	3	1033	1558	48		1098		−13
	4	1035		−75		1100	858	−17
	5	1038	804	−11		1101	859	32
	6	1040		63		1102	862	47
	7	1044	3715	111		1105	3829	−21
	8	1047	1565	8		1106	1600	76
	9	1049	1568	106		1108		103
	10	1051	1570	−48		1110	869	62
	11	1052	3730	52		1112	871	85
	12	1057		−7		1114	3848	−29
	13	1058	821	51		1118	3857	−23
	14	1059	1575	39		1122	3858	49
	15	1060	823	33		1126		12
	16	1061	3751	24		1127	880	−18
	17	1065	826	77		1130	3873	8
	18	1067		−63		1131	1613	7
	19	1069	3768	60		1132		−38
	20	1071		−50		1135	885	−47
	21	1072	835	−71		1137		46
	22	1075	3776	−47		1138	3891	81
	23	1078		−35		1141	891	12
	24	1080		−15		1143	1614	−6
	25	1083	843	−4		1145		77
	26	1084		−3		1147	1622	16
	27	1087		41		1149	3914	−70
	28	1090	1590	−9		1150	898	−51
	29					1154	1629	14
	30							
	31							

CORRECTIONS OF RIGHT ASCENSIONS OF 464 STARS OBTAINED BY THE PHOTOELECTRIC TRANSIT INSTRUMENT AT WUCHANG TIME OBSERVATORY WP

Xia Jiongyu Gu Xiulian

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

The corrections of right ascensions of 464 stars are obtained through analysing the time determination data during 1976—1979 in WP. The total number of star observations reaches 18180.

Because 464 stars are all chosen from SYNTHETIC CATALOGUE OF RIGHT ASCENSIONS FOR TIME SERVICE (CTC), the observation of WP may be regarded as a check for CTC. The results show that major stars of CTC have a rather high precision. But a few stars, which had been observed by one or two instruments, have not as high as the precision of others.

Therefore a suggestion for improving the catalogue of right ascension is proposed.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

武昌时辰站 Danjon 等高仪焦平面位移与温度的关系*

李 劲 峰

摘　要

本文通过分析求得仪器焦平面位移与温度呈线性变化，说明焦平面位移主要是由于仪器本体的温度形变所引起。同时也就可以用仪器温度推求 V_0，根据实际试算是可行的。

等高法观测就是测定均匀分布于各象限的恒星经过同一等高圈的时刻，从而求得当地的时间和纬度。而这个精确时刻的求得就是测定星光直接射入稜镜与通过水银面反射入稜镜的两星像在焦平面上相重合的时刻。Danjon 等高仪的构造示意图如图 1。测量与地球物理研究所武昌时辰站于 1963 年起用 Danjon 等高仪（OPL No. 29）测定时间和纬度。

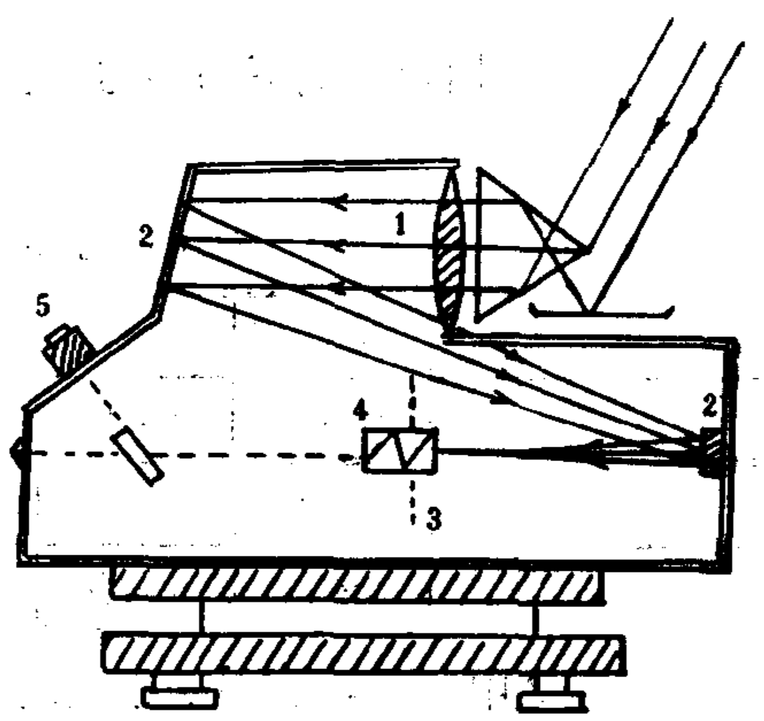


图 1　等高仪示意图

1.物镜　2.平面镜　3.焦平面
4.渥拉斯顿稜镜　5.目镜

由于在计数器上所记录的各个接触时刻的平均值并不是渥拉斯顿稜镜恰好在焦平面上的时刻，为了把所有的观测值都归算到仪器的焦平面上，因而必须计入焦平面位移对天顶距的改正 ε。

$$\varepsilon = R(V_0 - V_m)$$

式中 R 为测微鼓周值；V_0 为渥拉斯顿稜镜的零位置，也就是当渥拉斯顿稜镜的分象平面通过仪器焦平面时读取的测微鼓读数。而仪器焦平面随着温度的变化而略有变动，所以在每组的测前测后都要测定 V_0；V_m 就是当渥拉斯顿的分象平面通过接触测微轮各个接触位置所读取的各个测微鼓读数的平均值。如果接触测微轮的位置没有变动，则 V_m 可以保持不变，可视为仪器常数项。

究竟 V_0 与仪器温度 t 的关系如何？我们将等高仪（OPL No. 29）1963—1979 年 6208 个观测结果进行整理分析，用 $V_0 = a + bt$ 的关系，进行线性回归得到每年的 V_0 与 t 的关系式如表 1。

表中 γ 为 V_0 与 t 的相关系数，σ_x 为观测值 V_0 的中误差。由于 1978 年 11 月 7

* 1981 年 3 月收稿。本文是在韩天芑老师指导下写成的，郭丰美同志帮助计算了大量的成果，在此表示谢意。

表 1 V_0 与 t 的线性回归结果 （单位：测微鼓分格）

年份	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
a	0.69	1.36	2.45	3.69	4.17	4.68	4.69	4.61	4.49	4.19	3.93	4.64	4.55	4.55	4.92	4.67	4.69
b	0.14	0.12	0.13	0.14	0.14	0.13	0.13	0.13	0.13	0.10	0.16	0.14	0.14	0.14	0.12	0.13	0.13
r	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.97	0.99	0.99	1.00	0.96	0.98	1.00	1.00	0.99	0.98	0.99	0.99
σ_x土	0.10	0.10	0.10	0.11	0.11	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11

日曾将仪器大拆洗了一次，改变了测微轮的位置，致使 V_0 的读数值相应减少 2.26 格，所以 1978 年 11 月 7 日以后的 V_0 值都应加上 2.26 格化算到原来的系统。从表 1 看出，各年的 V_0 与 t 的关系可以确认为线性的，而且各年的 V_0 与 t 的变化率也可以认为一致。

V_0 的长期变化

从表 1 中看出，1963—1968 年 V_0 的 a 值逐年有所增加，1968 年以后几乎保持不变。

另外，将相同温度下每年的 V_0 值与 1963 年相应的 V_0 值求其差值，再取其平均值列于表 2。

表 2 V_0 的年变化 （单位：测微鼓分格）

1963 年	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
	+0.40	+1.44	+2.71	+3.25	+3.73	+3.71	+3.72	+3.87
1963 年	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
	+2.71	+3.37	+3.82	+3.79	+3.65	+3.81	+3.78	+3.80

从表 2 中可见，从 1968 年以后 V_0 的逐年变化的情况即趋于稳定。（但是 1972 年的情况比较特殊，可能是由于某一观测者的人差所引起）根据表中数值可以算出1963—1968 年的平均年变化为 +0.75 格/年，而 1974—1979 年的平均年变化为—0.003 格/年。由上列数值表明，在 1963—1968 年这 5 年间每年仪器焦平面向物镜端移动 +0.038 毫米，而上海台的等高仪 1958—1960 年每年仪器焦平面向物镜端移动 +0.045[3] 毫米，两架仪器的年变化量基本相似。产生这种年变化的原因可能是由于制造这种仪器本体的金属内部结构的变化所引起，而这种变化到一定时候即趋于平稳，也就是说这种金属“老化”到某一时候就趋于稳定了。

V_0 与温度的关系

前面述及，1969 年以后 V_0 的年变化趋于 0，但由于 1972 年情况比较特殊，所以我

们将 1974—1979 年这六年的 2190 个 V_0 值按温度统计，用最小二乘法求解得到

$$V_0 = 4.65 + 0.13t$$

如果考虑到 t^3，则

$$V_0 = 4.565 + 0.16608t - 0.001954t^2 + 0.0000289t^3$$

如果化到仪器拆洗后的情况，则

$$V_0 = 2.39 + 0.13t$$

或者

$$V_0 = 2.305 + 0.16608t - 0.001954t^2 + 0.0000289t^3$$

从上面分析看出，V_0 与温度的关系不仅包括线性部分，而且还包括高次项。而 V_0 与温度成线性变化，就说明 V_0 变化的主要原因是仪器本体的温度形变。因为等高仪的外壳是由 10 毫米厚的铸铁制成，物镜的焦距为 1 米，铸铁的线膨胀系数 $\alpha = 9 \times 10^{-6}$，那么温度增加 1°，1 米长的铸铁将增长 0.009 毫米，而通过我们测定 V_0，温度增加 1°，V_0 增加 0.13 格，测微螺旋的螺距为 5 毫米，一周为 100 格，所以温度增加 1°，即相当于焦平面位移为 +0.0065 毫米，据苏联波尔塔瓦天文台求得（OPL No. 21）的 V_0 关系式为[1]

$$V_0 - V_m = 0.172(t - 16^\circ.1)$$

所以（OPL No. 21）等高仪温度增加 1°，焦平面位移即为 +0.0085 毫米，这就更与仪器的热膨胀长度相近。

另外，1973 年我们换了一个新平面镜作试验，对于不同温度共有 106 个 V_0 值，用最小二乘法求解得到

$$V_0 = +0.06 + 0.16t$$

由这个结果可以看出，由两个不同的平面镜测得的 V_0 变化率基本上是相同的。

根据以上理由，说明 V_0 变化的主要原因是仪器本体的热胀冷缩所引起。如果仪器本体拉长，相对焦平面就往前移（渥拉斯顿棱镜向物镜端移动，这时 V_0 的读数是增加的）。

另一方面，由于温度改变也可能引起物镜的形变，从而引起物镜焦距的改变，这是一个很小的量，这可能就是 V_0 与 t 的关系式与线性型式不同的地方。

究竟用两个平面镜测得的 V_0 为什么会有一个近常数差 (3.87 格)，这可能主要是因为两个平面镜的平度不同所引起。

既然 V_0 变化的原因主要是仪器本体的热胀冷缩，因此我们就可以直接用 t 来推算 V_0。根据苏联波尔塔瓦天文台分析，决定焦平面位置去掉 t 的二次项及三次项的影响，最大可能对纬度产生 ±0″.02，钟差产生 ±2 毫秒的影响[2]。因此我们顾及三次项，根据

$$V_0 = 2.305 + 0.16608t - 0.001954t^2 + 0.0000289t^3$$

这个关系式，可以求得不同温度下相应的 V_0 值。如果读数测微轮不改变位置，这个关系式可不变。那么我们在一组测前测后就可以不测 V_0，而只要测一个仪器温度 t 就行了。

我们用推算的 V_0 与实测的 V_0 共算 88 组进行比较。设

$$\Delta u \text{ 之差值 } d\Delta u = \Delta u_{测} - \Delta u_{算}$$

$$\Delta\varphi \text{ 之差值 } d\Delta\varphi = \Delta\varphi_{测} - \Delta\varphi_{算}$$

统计结果列于表 3 及表 4。

表 3 $d\Delta u$ 的统计结果

$d\Delta u$(毫秒)	−12	−5	−4	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+7
n(组)	1	1	1	6	12	48	10	5	1	2	1

表 4 $d\Delta\varphi$ 的统计结果

$d\Delta\varphi$(0.″01)	−7	−6	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+13
n(组)	2	2	2	1	3	14	45	3	8	1	2	2	2	1

从表 3、表 4 看出，$d\Delta u$ 和 $d\Delta\varphi$ 都几乎成正态分布形式，即表示 $d\Delta u$、$d\Delta\varphi$ 纯属偶然误差。这也就表明用 t 推算 V_0 计算 Δu、$\Delta\varphi$ 是可行的。

假如用 t 推算 V_0，这样可以提高 V_0 的测定精度，我们一般一次的读数误差为 ±0.3 格，有时还可能达到 1 格，那么即使用 10 次取平均数的误差也为 ±0.1 格。而温度的读数误差为 ±0.1℃，即 V_0 的误差即为 ±0.01 格。同时由于稜镜一直放在等高仪上，这样可使稜镜与仪器本体温度基本保持一致。

ON THE RELATION BETWEEN TEMPERATURE AND DISPLACEMENTS OF FOCAL PLANE IN DANJON ASTROLABE AT WUCHANG TIME OBSERVATORY

Li Jingfeng

(*Institute of Geodes and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

The relation between temperature and the displacements of focal plane in Danjon Astrolabe is analysed. The results of analyses are as follows: a) The relation is linear; b) The displacement of focal plane is mostly caused by the instrument deformation due to temperature. Therefore the position of the focal plane (V_0) may be directly calculated from the instrument temperature. By comparison, we consider this method is practicable.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

短波传递时延及同步的有利时间 (I)*

张 金 通

一、概　　述

短波传递时间主要是通过天波传播，借助于电离层的反射来实现。电离层的变化影响短波时延。本文利用电离层垂直测高仪收录的电离层变化资料，直接求解发播台至收时台的时延。同时，根据电离层周日变化及有关收时资料，提出短波同步的有利时间。

二、时延的计算公式及数据处理

发射台 T 发播短波时号，通过 TOR 路径传到收时台 R。根据马丁等时定律，电波通过 MON 所需的时间为

$$\Delta t = \int_{MON} \frac{ds}{v} = \frac{MAN}{c}$$

计算 $TMONR$ 的时延可以直接计算 TAR 所需的时间来替代。v 为脉冲包络的群速度，c 为光速。$f = f' \cdot \cos i$，图 1 所示，f' 为发射频率，f 为等效发射频率。

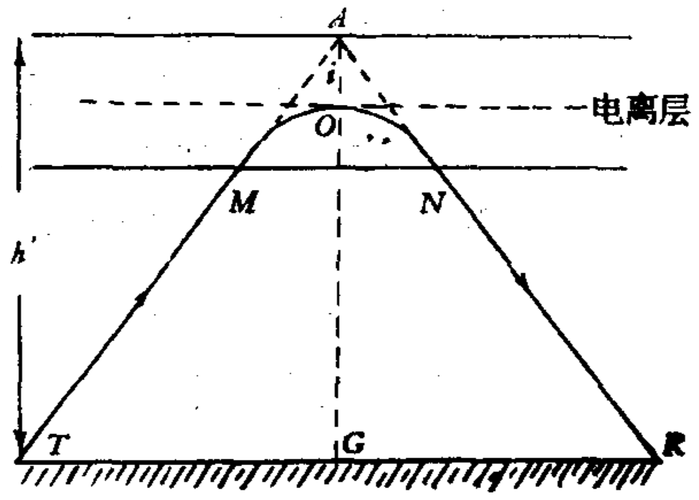


图 1　短波传输途径

发射台和收时台两地距离在 1000 公里以内时，以一跳天波为主，在等腰三角形 TAR 中，用 BIH 公式可以求出两地的时延 $\Delta t = 2 \times \frac{AT}{c}$。问题在于确定 i 角，i 角随电离层的高度而异，f 也就难于确定。我们采用 BIH 公式求出两地的时延，就可确定电离层的虚高 h' 及 i 角。

我们用 1979 年资料。武昌时辰站每天收录 BPV 时号八次，用 BIH 公式可求出一固定时延值；按本文采用的方法，每天得到八个不同的时延值。比较两种方法算出的全年八次的收时精度，后者全优于前者。

三、结　　论

直接用电离层资料计算全年 8 次的收时精度均优于用 BIH 公式获得的精度，最好的

* 1981 年 3 月收稿。

达 ±0.27 毫秒，如顾及电离层的扰动、E_s 层等因素，有可能得到更大的改善。

电离层变化直接影响时延，甚至于收不到时号。北京时 9^h—15^h 电离层比较稳定，定时精度高，12^h 左右吸收大，时号微弱不利于定时。日出、日没变化较剧烈，容易加大定时误差。

THE TIME DELAY OF SHORT WAVE TRANSMISSION AND THE FAVOURABLE TIME OF SYNCHRONIZATION (I)

Zhang Jintong

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

I. Introduction

The transmitting time of short wave is realized through atmospheric wave transmission and by means of the reflection of ionosphere. The changes of ionosphere affect the time delay of short wave. In this paper, by utilizing the data of ionospheric changes recorded by the ionospheric vertical altimeter, we directly solve the time delay from transmitting station to receiving station. In the meantime, in accordance with the diurnal changes of ionosphere and related time receiving data, we put forward the favourable time of short wave synchronization.

II. The computing formula of time delay and data processing

The transmitting station T transmits short wave time signal which is transmitted to the receiving station R through the paph of TOR. According to the equitime law of Martyn, the required time of radio wave passing through MON is

$$\Delta t = \int_{MON} \frac{ds}{v} = \frac{MAN}{c}$$

To directly solve the required time of TAR may be used instead of calculating the time delay of TMONR. v is the group velocity of pulse envelope, c the light velocity and

$$f = f' \cos i$$

As shown in figure 1, f' is the transmitting frequency, and f the equivalent transmitting frequency.

When the distance between the receiving station and the transmitting station is within the range of 1000km, giving first place to a jump of atmospheric wave, we using BIH formula may obtain the time delay $t = 2\frac{AT}{c}$ in the isoceles triangle TAR. The question lies in the determination of angle i. Angle i varies with the altitude of ionosphere. Hence f is difficult to determine. By using the BIH formula, we obtain the time delay of the two places, and the virtual height of ionosphere and the angle i will be determined then.

III. Conclusion

The accuracy obtained by directly using ionospheric data to calculate 8 times of receiving time in a whole year is better than that obtained with the BIH formula. The best accuracy among them may reach to 0.27ms. If the factors of ionospheric disturbance and E_s layer, etc are taken into account, the result may be further improved.

The changes of ionosphere affect directly the time delay, and even we shall receive no time signal. The ionosphere at the Beijing time of 9^h—15^h is comparatively stable. The accuracy of timing is high. At the time about 12.00, the absorption becomes great. The weak time signal is also unfavourable for timing. While at sunrise and at sunset the changes are acute. It is apt to increase timing difference.

第4号 测量与地球物理集刊 No. 4
1982 年 ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA 1982

航空重力测量的厄特弗斯问题*

张 善 言

提 要

在开展海洋重力测量时就已经指出了厄特弗斯问题。本文列出了厄特弗斯改正公式，并计算出了实用改正式。在飞机上进行重力测量时，由于飞行速度很大，厄特弗斯改正也就很大。航速 1000 公里/小时，在赤道上的改正值可达 5263 毫伽。又列出了厄特弗斯误差计算式及飞行速度误差、飞行航向误差、所在位置纬度误差、以及地球曲率半径误差所引起的厄特弗斯误差的计算式。以及其相应的实用公式。文中并指出，改正式中的离心项一般采用参考椭球体的曲率半径，实际的测量是在起伏的大地水准面上进行的。所以应当采用大地水准面起伏的曲率半径。两者是不等的。有时可差 200 公里甚至更大。在航空重力测量中，这种半径差别的效应，由 −500 公里至 +500 公里和飞行速度分别为 500 公里/小时及 1000 公里/小时，已绘图表示。由图可见，半径差别 200 公里，航速 1000 公里/小时，此效应可达 38 毫伽。

在进行海洋重力测量时，就已经指出了厄特弗斯问题。这是由于航行着的船上进行重力测量时，改变了地球自转的正常的离心加速度的缘故。在飞机上进行测量时，飞行的速度很大，如飞行的速度不变，飞行的高度不变的理想条件下，根据汤普森等，航空重力测量的厄特弗斯效应的公式为

$$E = \frac{R_\varphi + h}{R_\varphi^2}\left[(V_\varphi + V_e)^2 + V_n^2 - V_\varphi^2\right] \tag{1}$$

式中

E——厄特弗斯改正，以毫伽表示，

R_φ——为纬度 φ 上的地球曲率半径，

V_φ——为在纬度 φ 的地球表面上的切线速度，

h——飞机离大地水准面的高度，

V_e——为飞机航速的东向分量，

V_n——为飞机航速的北向分量。

(1)式经简单变换得

$$E = \frac{R_\varphi + h}{R_\varphi^2}\left(2V_\varphi V_e + V^2\right) \tag{2}$$

* 1981 年 4 月收稿。

式中

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_n^2}$$

$$V_e = V \sin\alpha$$

$$V_n = V \cos\alpha$$

α——飞行的方位角，自北向东计数。将 $V_\varphi = R_\varphi \cdot \omega \cdot \cos\varphi$ 代入(2)式，得

$$E = \left(1 + \frac{h}{R_\varphi}\right)\left(2\omega V \sin\alpha\cos\varphi + \frac{V^2}{R_\varphi}\right) \tag{3}$$

式中

ω——地球自转的角速度。所以(3)式除了系数 $\left(1 + \frac{h}{R_\varphi}\right)$ 之外，与海洋重力测量的厄特弗斯效应计算完全一样。按海洋重力测量的厄特弗斯效应所计算的结果，再乘上系数 $\left(1 + \frac{h}{R_\varphi}\right)$，这就是把对地球表面的速度，改正到航高 h 上的速度。

如果距离以厘米表示，速度以厘米/秒表示，则（3）式所给出的厄特弗斯改正是以 c·g·s 制来表示加速度的单位，即伽或厘米/秒²。地球的曲率半径 R_φ 是随纬度不同而改变的。为了公式的实用，采用平均地球曲率半径 $R = 6367.4$ 公里。地球自转角速度 $\omega = \frac{2\pi}{T}$，式中 T 是 86164，它是一恒星日中的秒数。根据地球表面速度计算时，则得实际应用的公式为

$$E = 4.0512V \sin\alpha\cos\varphi + 0.0012118V^2 \tag{3'}$$

E 以毫伽表示，V 以公里表示。

根据(3′)式，绘出了航速 500 公里/小时及 1000 公里/小时的不同方位飞行时的厄特弗斯改正图 1 及图 2。

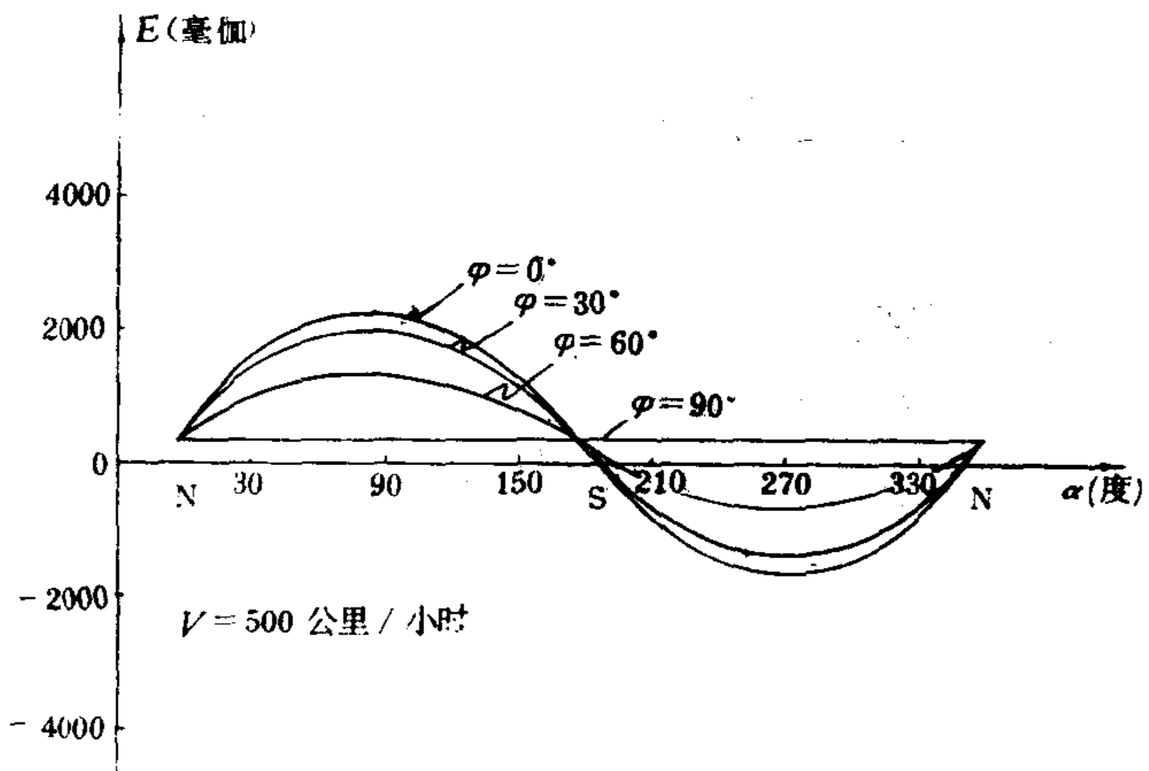


图 1　不同方位飞行时厄特弗斯改正

由图 2 可见，在纬度 30° 时，飞机向东飞行，航速 1000 公里/小时，厄特弗斯改正为 4720 毫伽。如在赤道上，则改正数可达 5263 毫伽。如航高为 10 公里，则把地速归算到

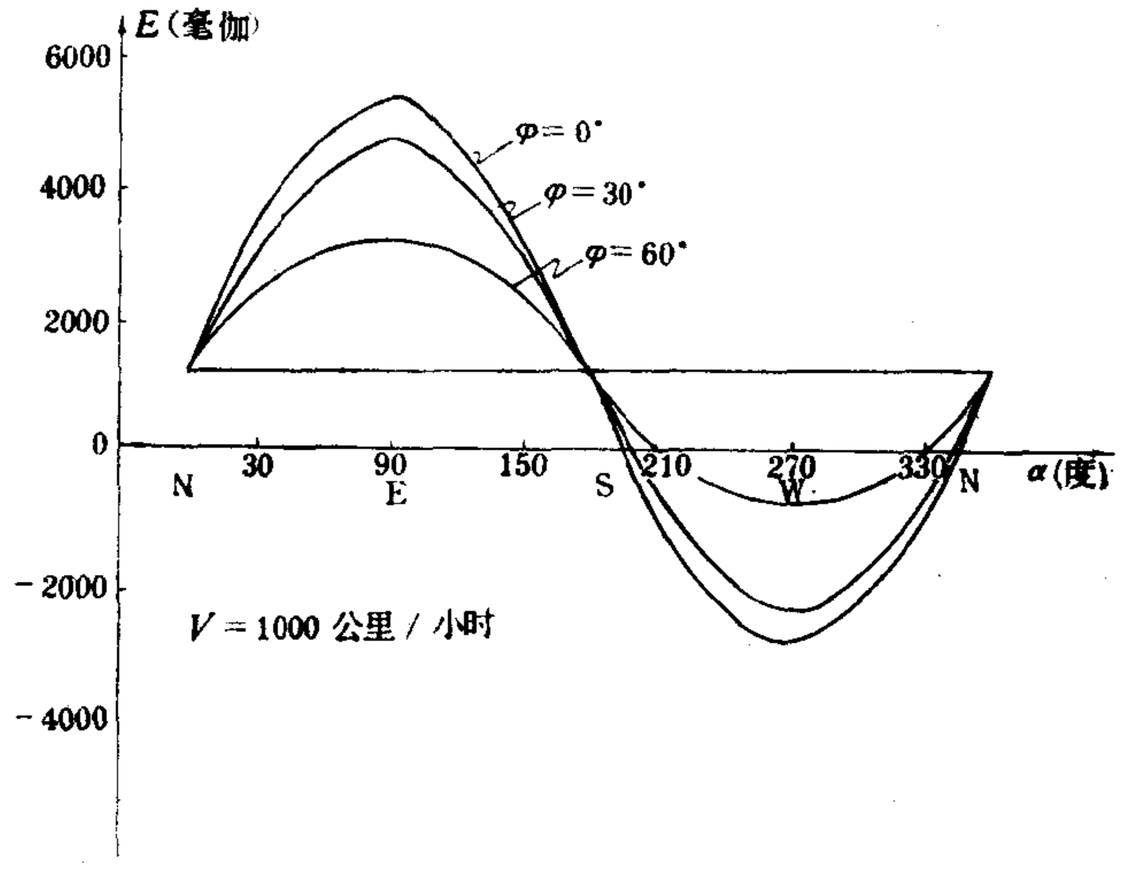


图 2

航高 h 上的速度，则其改正分别为 4727 毫伽及 5271 毫伽。

二

为了估算厄特弗斯改正的精确度，将公式(3)进行微分。此处暂设航高 h 为零。

$$E = 2\omega V \sin\alpha\cos\varphi + \frac{V^2}{R_\varphi}$$

$$= E_1 + E_2$$

式中

$$E_1 = 2\omega V \sin\alpha\cos\varphi$$

$$E_2 = \frac{V^2}{R_\varphi}$$

微分之得

$$dE_1 = 2\omega \sin\alpha\cos\varphi dv + 2\omega V\cos\alpha\cos\varphi d\alpha - 2\omega V \sin\alpha \sin\varphi d\varphi$$

$$dE_2 = 2\frac{V}{R_\varphi}dv - \frac{V^2}{R_\varphi^2}dR_\varphi$$

将微分换成误差，则

$$m_E = \pm\sqrt{m_{E_1}^2 + m_{E_2}^2}$$

$$= \pm\sqrt{m_v^2 + m_\alpha^2 + m_\varphi^2 + m_R^2} \qquad (4)$$

式中

$$m_v = \pm\sqrt{(2\omega \sin\alpha\cos\varphi)^2 + \frac{4V^2}{R^2}} \cdot \sigma_v \qquad (4a)$$

$$m_\alpha = \pm 2\omega V \cos\alpha\cos\varphi \cdot \sigma_\alpha \tag{4b}$$

$$m_\varphi = \pm 2\omega V \sin\alpha\sin\varphi \cdot \sigma_\varphi \tag{4c}$$

$$m_R = \pm \frac{V^2}{R^2} \cdot \sigma_R \tag{4d}$$

σ_v, σ_α, σ_φ 及 σ_R 相应地为测定飞机飞行速度的误差，飞行方向的误差，所在位置纬度为 φ 的误差以及地球曲率半径的误差。

由(4)式可见，如果需要确定厄特弗斯改正的误差不大于 ±4 毫伽，则确定的速度误差所引起的 m_v，方向误差所引起的 m_α，纬度误差所引起的 m_φ，以及地球曲率半径误差所引起的 m_R 不应超过 ±2 毫伽。

将上面已提到的地球平均半径 R 以及地球自转角速度 ω 的数值代入(4)，(4a)，(4b)，(4c) 及 (4d) 各式中，则确定厄特弗斯改正和各种误差的实用公式为

$$E = 4.0512V\sin\alpha\cos\varphi + 0.0012118V^2 \tag{5}$$

$$m_v = \pm 27.778\sqrt{0.02127\sin^2\alpha\cos^2\varphi + 0.76127\times 10^{-8}V^2}\cdot\sigma_v \tag{5a}$$

$$m_\alpha = \pm 4.0512V\cos\alpha\cos\varphi\cdot\sigma_\alpha \tag{5b}$$

$$m_\varphi = \pm 4.0512V\sin\alpha\sin\varphi\sigma_\varphi \tag{5c}$$

$$m_R = \pm 1.9034\cdot 10^{-7}V^2\sigma_R \tag{5d}$$

式中，E，m_v，m_α，m_φ 及 m_R 以毫伽表示，V 和 σ_v 以公里/小时表示，σ_α，σ_φ 以弧度表示。为了估算 σ_v，σ_α，σ_φ 及 σ_R 允许测定的误差，将 (5a)、(5b)、(5c) 及 (5d) 改写成

$$\sigma_v = \pm m_v/27.778\sqrt{0.02127\sin^2\alpha\cos^2\varphi + 0.76127\times 10^{-8}V^2} \tag{6a}$$

$$\sigma_\alpha = \pm m_\alpha/4.0512V\cos\alpha\cos\varphi \tag{6b}$$

$$\sigma_\varphi = \pm m_\varphi/4.0512V\sin\alpha\sin\varphi \tag{6c}$$

$$\sigma_R = \pm m_R/1.9034\times 10^{-7}V^2 \tag{6d}$$

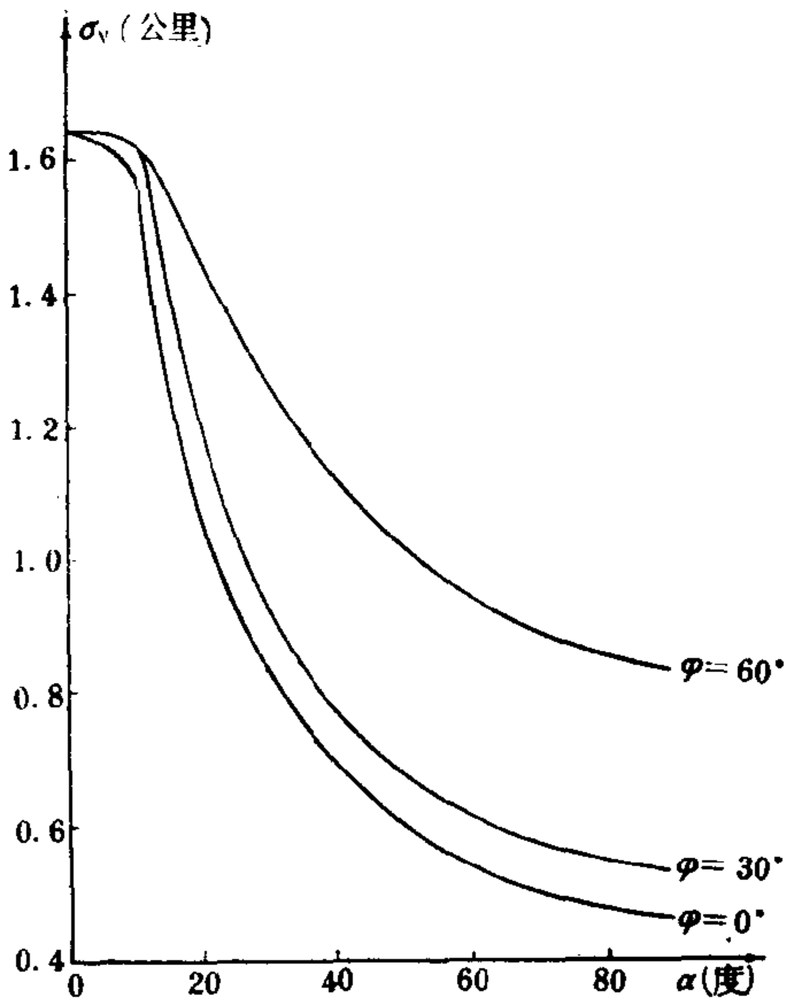


图 3　航速 V 所要求测定的精度 σ_v 与航向角的关系

$m_v = \pm 2$ 毫伽　$V = 500$ 公里/小时

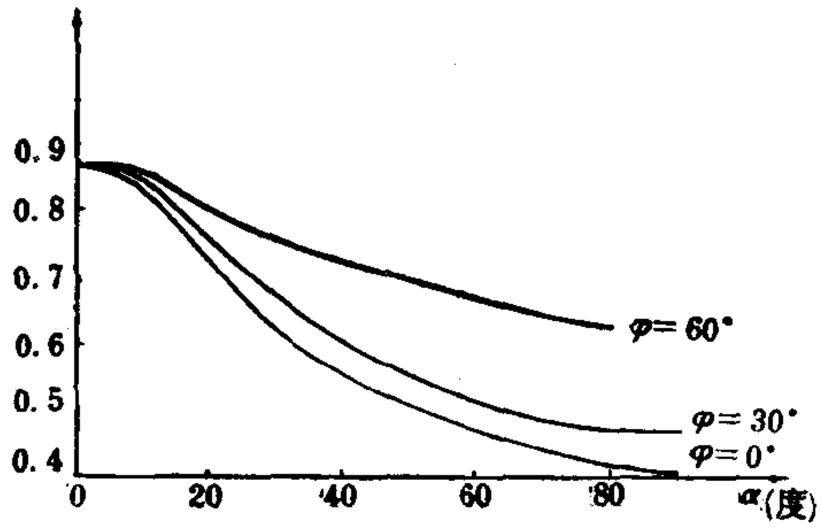


图 4　航向 V 所要求测定的精度 σ_v 与航向角的关系

$m_v = \pm 2$ 毫伽　$V = 1000$ 公里/小时

设 $m_v = m_a = m_\varphi = m_R = \pm 2$ 毫伽，并设航速 V 为 500 公里/小时及 1000 公里/小时，各变量所要求测定的精度与航向角的关系曲线。

由图 3，图 4 可以看出，当飞机在东西方向飞行时，对航速测定的精度要求较高，在低纬度地区，测速精度要求高于 0.5 公里/小时，就是在南北方向飞行时，不论在地球上任何

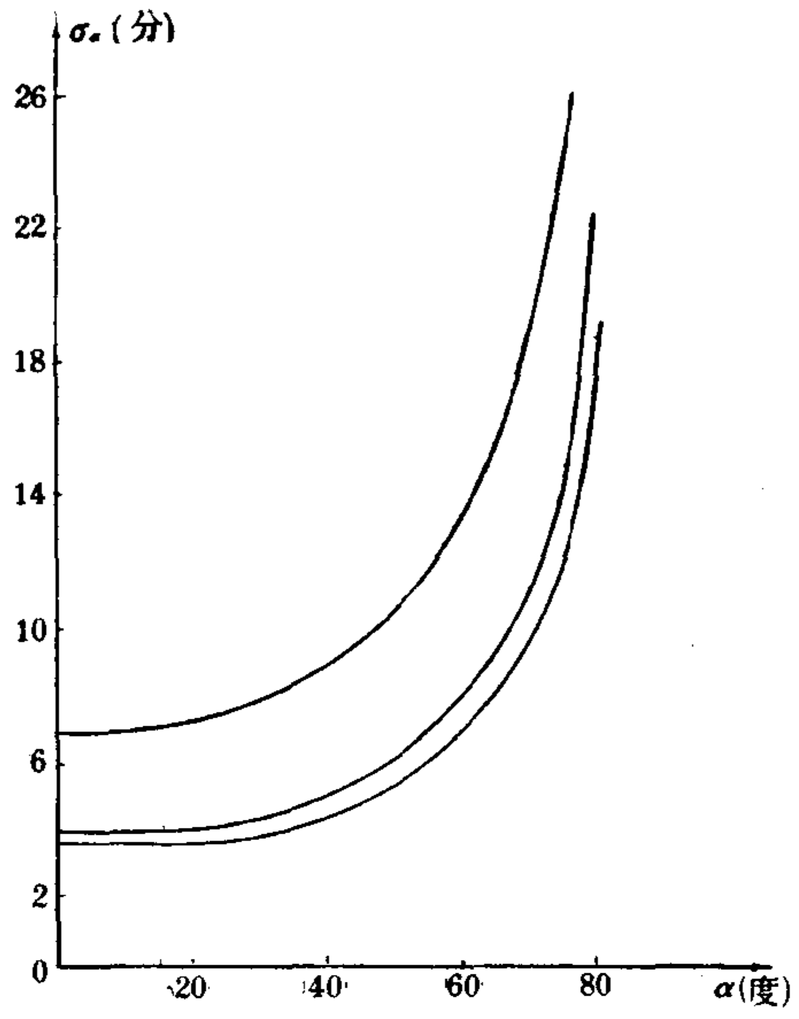


图 5　航向角 α 所要求测定的精度 σ_a 与航向角的关系 $m_a = \pm 2$ 毫伽　$V = 500$ 公里/小时

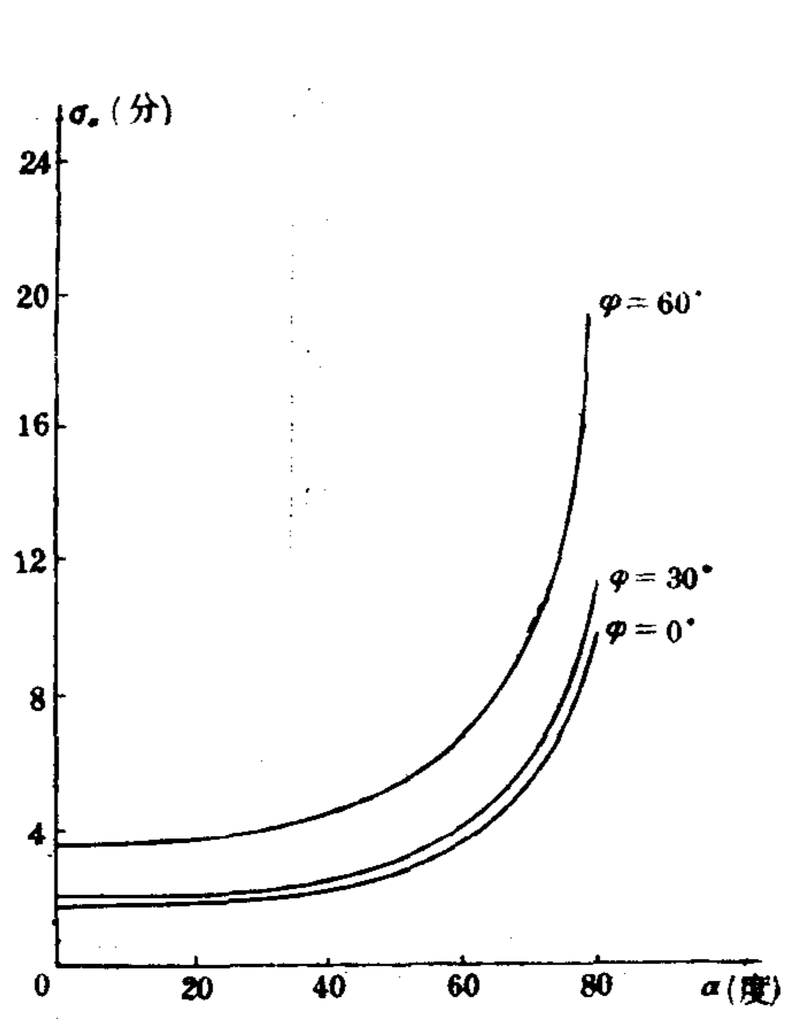


图 6　航向角 α 所要求测定的精度 σ_a 与航向角的关系 $m_a = \pm 2$ 毫伽　$V = 1000$ 公里/小时

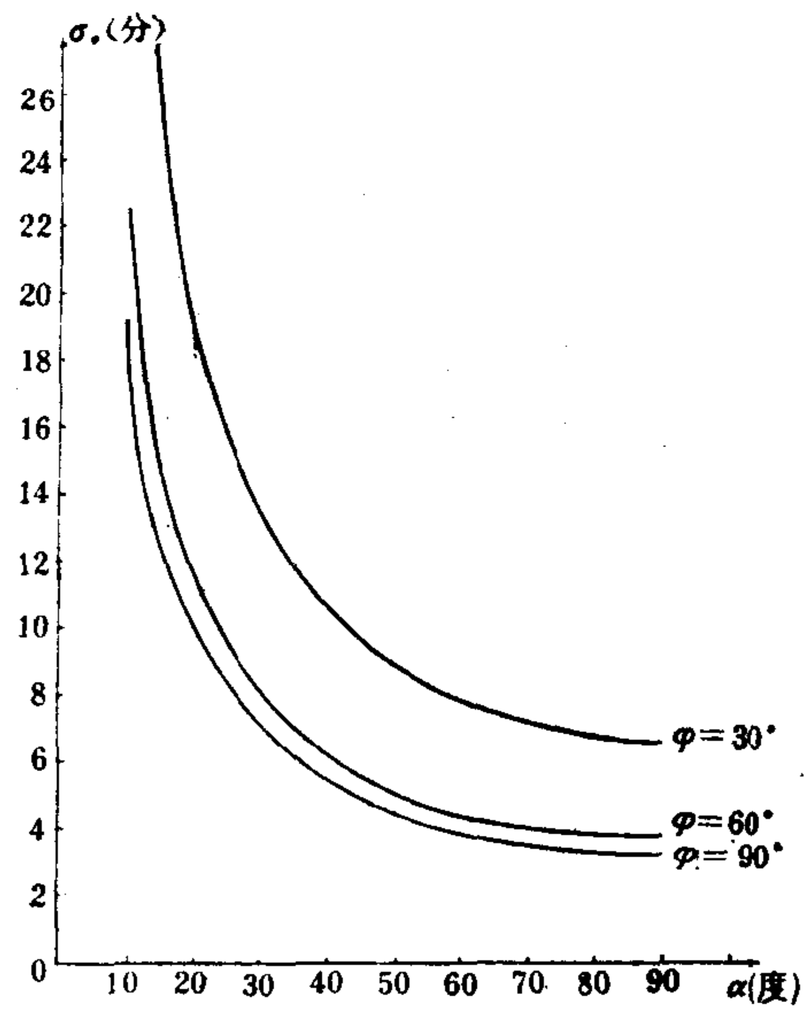


图 7　纬度所需测定的精度 σ_φ 与航向角的关系 $m_\varphi = \pm 2$ 毫伽　$V = 500$ 公里/小时

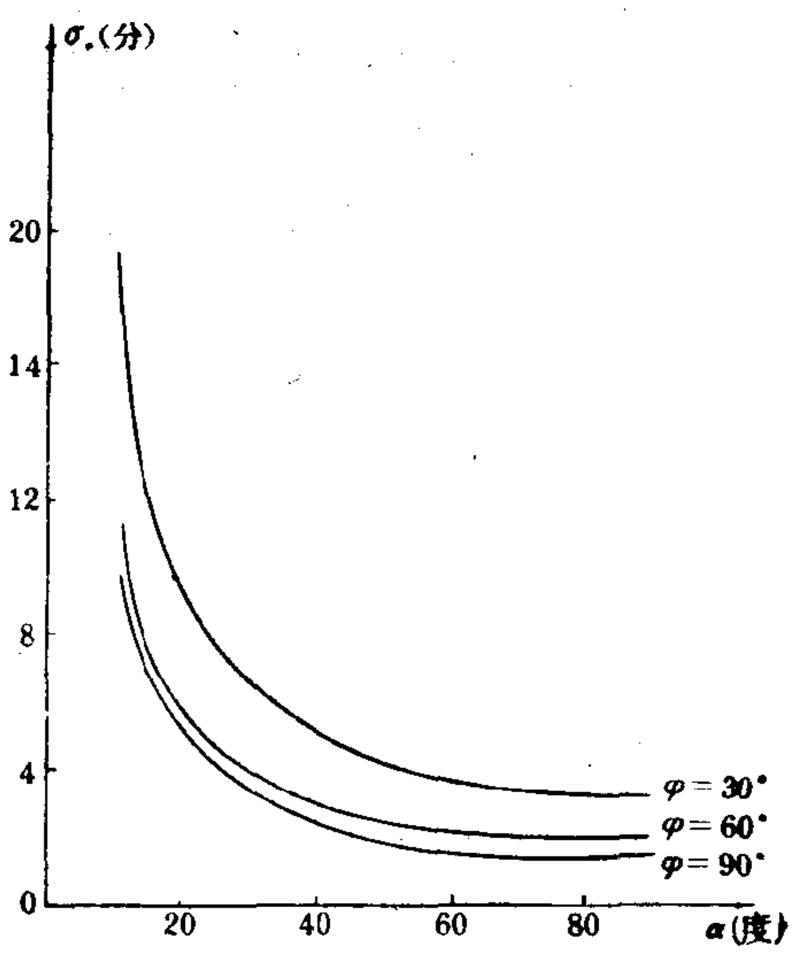


图 8　纬度所需测定的精度 σ_φ 与航向角的关系 $m_\varphi = \pm 2$ 毫伽　$V = 1000$ 公里/小时

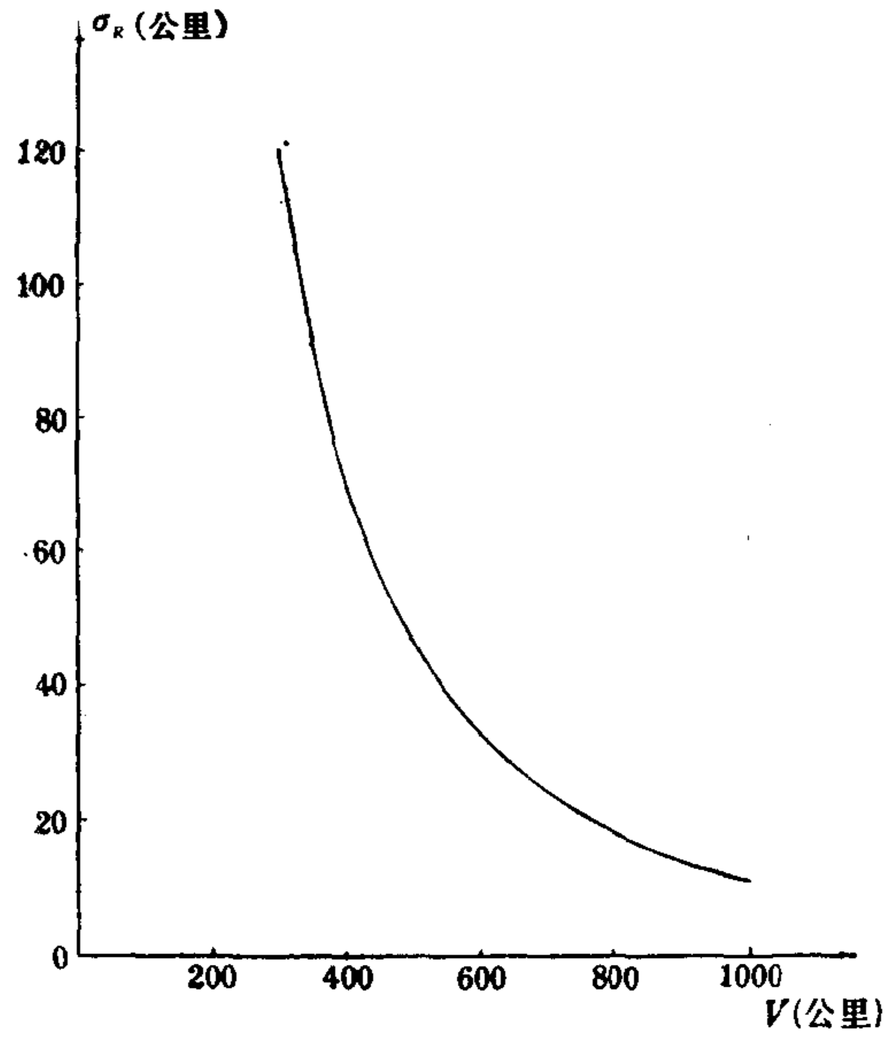


图 9　地球曲率半径所要求的精度 σ_R 与航速的关系

$m_\varphi = \pm 2$ 毫伽

地区，测速精度也有所限制。而航速 1000 公里/小时，测速精度则要求达到 0.8 公里。

由图 5，图 6 可见，当飞行在南北方向时，航向角测定的精度要求较高，在低于纬度 30° 时，航速 500 公里/小时，测角精度要求高于 4 分，航速 1000 公里/小时，测角精度要求高于 2 分，而正东西方向飞行时，对测角精度没有要求。

由图 7，图 8 可以看出，其曲线与图 5，图 6 完全一样，不同的是反了向。所以当飞行在东西方向时，对纬度测定的精度要求要高。在纬度高于 60° 时，航速 500 公里/小时，纬度测定精度高于 4 分；航速 1000 公里/小时，纬度测定精度高于 2 分。

图 9 可以看出，对地球曲率半径所要求的精度，当航速 500 公里/小时，要求 $\sigma_R = 42$ 公里，航速 1000 公里/小时，则要求 10.5 公里。我们知道，地球椭球体曲率半径的变化，从赤道到两极不超过 22 公里。实用公式中采用的是平均曲率半径，所以曲率半径最大的差数小于 11 公里。由此可见，采用地球的平均曲率半径，当航速小于 1000 公里/小时时，适用于全球计数之用。

三

以上所研究的厄特弗斯改正以参考椭球体为基准进行的。所以改正式中离心项采用的是参考椭球体的曲率半径。但是在实际的测量是在起伏的大地水准面上进行的。所以改正式中离心项采用的应当是大地水准面起伏的曲率半径。两种曲率半径是不等的，有时可差 200 公里，甚至更大[7]。因此计数时采用参考椭球体的曲率半径就会引起误差。

为了简化讨论起见，我们设想飞机飞行的路线位于海洋的上空。并且平行于起伏的大地水准面上飞行。海洋面与大地水准面是符合的。而飞行高度所引起的重力影响，通过精

密测高的信息已经改正到海平面上。当然也可以改正到任一高度的基准面上（如改正到飞机飞行的平均高度上）。

如一架垂直稳定的重力仪沿海面飞行，则仪器经受的离心加速度采用的改正项 V^2/R。以上的讨论中，R 采用的是参考椭球体的曲率半径 R_e，然而实际上应当采用沿飞行路线上的大地水准面上的曲率半径 R_g（图 10）、图中两圆弧表示参考椭球体上和大地水准面上的一段弧长 Δs。由图参考椭球体上的曲率半径

$$R_e = \frac{\Delta s}{\alpha_e}。$$

则大地水准面的曲率半径为

$$R_g = \frac{\Delta s}{\alpha_g} = \frac{\Delta s}{\alpha_e + (d_2 - d_1)} \qquad (7)$$

式中 α_e 和 α_g 表示圆弧 Δs 所对的圆心角。而 d_1 及 d_2 是圆弧两端点上的垂线偏差。而两半径之间的差数 $\Delta R = R_g - R_e$。取其一次项则 $\Delta R = \frac{\Delta d}{\alpha_e}$。

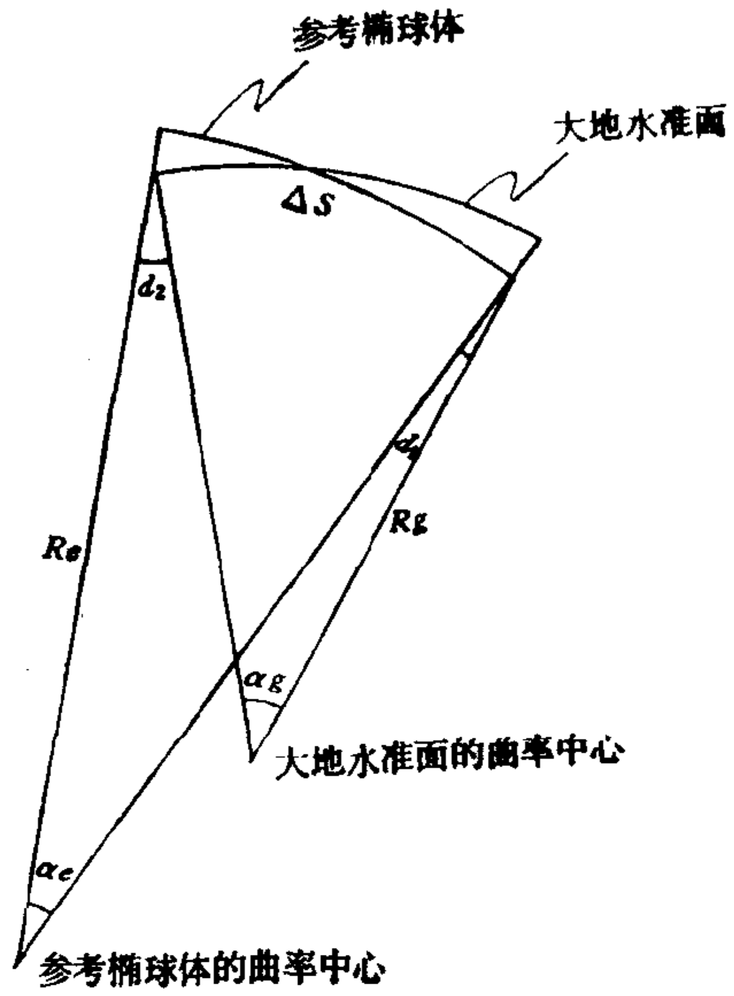


图 10

$\Delta d = d_2 - d_1$。ΔR 以公里表示，约为垂线偏差水平梯度（角秒/公里）的 200 倍。

把厄特弗斯改正式的离心项 V^2/R_e 微分，则得进行离心加速度改正时，ΔR 的影响，

$$\Delta g = \frac{V^2}{R_e^2} \cdot \Delta R \qquad (8)$$

R_e 采用地球体的平均曲率半径，上式和(4d)是完全相同的。(4d)所讨论的是采用参考椭球体的平均曲率半径之后，对不同纬度上的曲率半径不同时的影响。而这里所讨论的则是对大地水准面上曲率半径不同时的影响。将平均值 R_e 代入，则得实用改正式为

$$\Delta g = 1.9034 \cdot 10^{-7} V^2 \Delta R \qquad (9)$$

式中 V，ΔR 以公里为单位，Δg 以毫伽为单位。根据(9)式绘制成图 11。

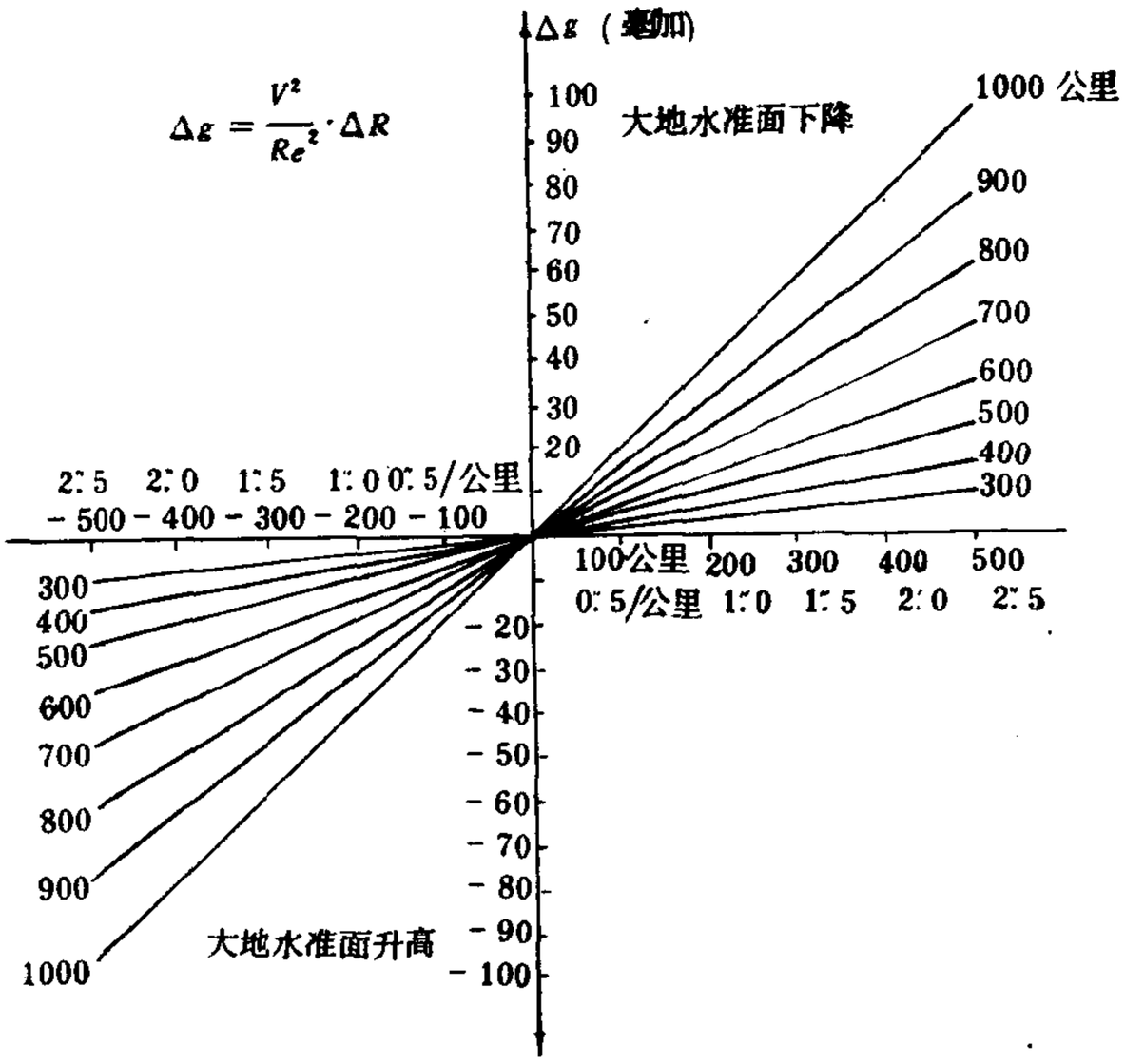


图 11

大地水准面降低 ΔR 为正。如此数值不加考虑，则加速度改正就太大。大地水准面升高，ΔR 为负，则用 R_e 计算的改正数就太小。

当然，由于沿飞行路线上大地水准面的曲率半径是变化的。所以 ΔR 及加速度改正相关联的误差也是不断变化的。

由图 11 可见，当 $R = 200$ 公里时，相应于垂线偏差水平梯度 1″/公里。飞行速度 500 公里/小时，此影响为 10 毫伽。飞行速度 1000 公里/小时，此影响可达 38 毫伽。

参 考 文 献

[1] 方俊，重力测量与地球形状学，上册，科学出版社，1965。

[2] Glicken, M., Eötvös Correction for a Moving Gravity Meter, *Geophysics*, **XXVII**, No. 4, P. 531, 1962.

[3] Greenewalt, D., Gravimetric error associated with rapid movement parallel to an undulating Geoid, *Advances in dynamic Gravimetry, 1970.*

[4] Harlan, R. B., Eötvös correction for airborne Gravimetry, *J. G. R.*, **73**, p 4675, 1968.

[5] Nettleton, L. L. Lacoste, L., Harrison, J. C.. Tests of an airborne Gravity meter, *Geophysics*, **XXV**, No. 1, 1960.

[6] Thompson, L. G. D., Lacoste, L. J. B., Aerial Gravity Measurements *J. G. R.*, **65**, No. 1. 1960.

[7] Wall, R. E., Air-Borne Gravimetry Errors Associated With Geoid Undulations, *J. G. R.*, **76**, No. 29, p. 7293, 1971.

[8] Попов, Е. И., Определение поправка за эффект этвеша при измерении ускорения силве тяжести с самолета, *изветия АН СССР №3 серия Геофиз*, 1962.

ON THE EÖTVÖS PROBLEM FOR AERIAL GRAVITY MEASUREMENT

Zhang Shanyan

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

When carrying out ocean gravity measurement, the Eötvös problem has already been pointed out. In this paper, the Eötvös correction formula is listed and the practical correction formula calculated. When airborne gravimetry being underway, the Eötvös correction will be very large due to the fast flight velocity. While the flying speed is 1000 km/h, the correction on the equator may reachr 5263 milligal. The Eötvös error calculation formula is listed, too. Those calculating expressions of flight velocity, flight direction, latitude in the place where it lies, and that resulted from the error of radius of earth curvature are listed out with their relevant practical formulas. Again the paper points out that, the radius of curvature of the reference ellipsoid is generally used for the centrifugal term in the correction formula. In reality, the measurement is carried out on the undulate geoid. Therefore, the radius of curvature of geoid undulation should be adopted. Both of them are not identical. Sometimes there is a difference of 200 km between them, or even greater. In airborne gravimetry, the effect of this difference is from −500 km to +500 km and the flight velocities of the plane are 500 km/h and 1000 km/h respectively. These are shown in the figure. It may be seen from the figure that, when the radius difference is 200 km and the flight velocity is 1000 km/h, this effect may reach 38 milligal.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

计算重力扰动位的简化方法*

骆　鸣　津

摘　要

本文以重力位等效球为基础，按半径进行展开，解算了重力基本微分方程，导出了对重力异常和地形面上进行面积分的五类计算扰动位的公式，其中用“重力垂直梯度”和“改变积分核”的办法，可将二重面积分化为一重面积分，尤其是后者，能使计算工作量大为减少，因此，本工作将对应用和理论方面起到一定作用。

在研究地球形状中，须计算地球的重力扰动位——地球重力位与地球正常重力位之差，才能算出高程异常及垂线偏差等必要的参数。经典的方法是用司托克斯公式及威尼-曼尼兹公式，但它们都以球面为边界面，这就遇到了诸如归算这样的难题，莫洛金斯基以地形面为边界面，从而在理论上有了突破，但在具体计算时是较繁重的，因为它要用地面上的重力资料和地形资料进行两次面积分。

本文作者在文献[1]中用球函数法解算重力的基本微分方程，与莫氏导出的结果很接近。本文仍用文[1]的等效球的办法，导出计算扰动位 T 的不同形式的公式，特别是改变被积函数重力异常为重力垂直梯度和改变积分核的办法，可将二重面积分化为一重面积分。这样就使计算工作量大为减小。

根据 M. C. 莫洛金斯基 1960 年公式[2]取至 T_1 级，则有

$$\begin{aligned} T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} &= T_0 + T_1 \\ &= \frac{1}{4\pi\rho_0}\int f(\theta',\lambda')S(\psi)d\sigma' \\ &\quad + \frac{1}{8\pi^2\rho_0}\int S(\psi)\int \frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{r^3(\psi')} f(\theta'',\lambda'')d\sigma''d\sigma' \\ &\quad + \frac{3}{(4\pi)^3\rho_0^3}\int S(\psi)\int \frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{r^3(\psi')}\int f(\theta''',\lambda''')S(\psi'')d\sigma'''d\sigma''d\sigma' \end{aligned} \quad (1)$$

式中

ρ_N——地形面之向径，

$T_{(\rho_N,\theta,\lambda)}$——地形面上 $(\rho_N, \theta, \lambda)$ 点之扰动位，

ρ_0——计算球面之半径，

ψ——(θ, λ) 点至 (θ', λ') 点之角距，

ψ'——(θ', λ') 点至 (θ'', λ'') 点之角距，

* 1980 年 1 月收稿。

ψ''——(θ'', λ'') 点至 (θ''', λ''') 点之角距，

$f(\theta', \lambda')$——地形面 $(\rho_N, \theta, \lambda)$ 点上之 $g - r$ 也可表示为 $f(\rho_N, \theta, \lambda)$

$$d\sigma' = \rho_0^2 d\omega' = \rho_0^2 \sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

$$d\sigma'' = \rho_0^2 d\omega'' = \rho_0^2 \sin\theta'' d\theta'' d\lambda''$$

$$d\sigma''' = \rho_0^2 d\omega''' = \rho_0^2 \sin\theta''' d\theta''' d\lambda'''$$

根据文献[1] 18 页(28)式及 20 页(32)式有

$$-\frac{2\rho_0^3}{r^3} = \sum_{i=0}^{\infty} n(2n+1)P_n(\cos\psi) = R(\psi) \tag{2}$$

并根据文献[1] 21 页注 1 的结果，可将(1)式改写成文献[1] (33) 式。

$$T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega'$$
$$- \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\int f(\theta'', \lambda'')\frac{H(\theta'', \lambda'') - H(\theta', \lambda')}{\rho_0} R(\psi')d\omega''d\omega'$$
$$+ \frac{3\rho_0}{8\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{\rho_0} S(\psi)d\omega' \tag{3}$$

莫洛金斯基理论是根据地形面上的边界条件，求解重力扰动位在外空场中一点的数值。现在我们在地形面内找一个半径为 ρ_0 的球，使该球外无质量。如果能找到此球面上的边界条件，用满足于根据调和正则函数的球函数理论外推地形面上之函数值，使其等于原地形面给定的边界条件，则外空或地形面上任一点的调和函数——重力扰动位的数值，可由球面之边界条件单一的确定。我们仍用这种等效球的办法，由文献[1] (20) 式、(34)式导出下面公式:

$$T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega'$$
$$- \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\int f(\theta'', \lambda'')\frac{H(\theta'', \lambda'') - H(\theta', \lambda')}{\rho_0} R(\psi')d\omega''d\omega'$$
$$+ \frac{3\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{\rho_0} S(\psi)d\omega'$$
$$+ \frac{H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega' \tag{4}$$

或写成

$$T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega'$$
$$- \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\int f(\theta'', \lambda'')\frac{H(\theta'', \lambda'') - H(\theta', \lambda')}{\rho_0} R(\psi')d\omega''d\omega'$$
$$+ \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{\rho_0} S(\psi)d\omega'$$
$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{H(\theta', \lambda')}{\rho_0} S(\psi)d\omega' \tag{5}$$

上面这些结果是根据球函数理论[3]推导而来，现将主要公式列出，以作下面引用。

$$T_{(\rho,\theta,\lambda)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{i+1}}{\rho^{i+1}} T_{i(\rho_0,\theta,\lambda)} \qquad \rho_0 < \rho$$

$$T_{(\rho_0,\theta,\lambda)} = \sum_{i=0}^{\infty} T_{i(\rho_0,\theta,\lambda)}$$

$$T_{i(\rho_0,\theta,\lambda)} = \frac{2i+1}{4\pi} \int T_{(\rho_0,\theta',\lambda')} P_i(\cos\psi) d\omega'$$

可以看出，由莫洛金斯基公式导出的(3)式与我们用球函数法导出之(4)式或(5)式很相近。

(4)式(或(5)式)右端第一项为主，右端第四项为主项的 $\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}$ 倍，故很小，右端第三项也很小，因为在被研究点 (θ,λ) 上 $\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}$ 为零，其周围此值亦很小，当远处 $\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}$ 增大时 $S(\psi)$ 将随距离增长减小更快。我们令

$$\rho_0 = 6371 \text{ 公里}$$

$$H(\theta',\lambda') - H(\theta,\lambda) = 1 \text{ 公里}$$

则此项被积函数 $\frac{3}{2} f(\theta',\lambda')[H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)]/\rho_0$ 与主项被积函数 $f(\theta',\lambda')$ 之比近似等于 $\frac{1}{5000}$，如果重力异常 $f(\theta',\lambda') = g - r = 500$ 毫伽，则此项被积函数仅 0.1 毫伽，因此，在一般情况下(4)式右端第三第四项均可略去，故(4)式可写成

$$T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = \frac{\rho_0}{4\pi} \int f(\theta',\lambda') S(\psi) d\omega'$$

$$- \frac{\rho_0}{16\pi^2} \int S(\psi) \int f(\theta'',\lambda'') \frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{\rho_0} R(\psi') d\omega' d\omega'' \qquad (6)$$

现在的问题是计算(6)式右端第二项，令：

$$\text{II} = -\frac{\rho_0}{16\pi^2} \int S(\psi) \int f(\theta'',\lambda'') \frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{\rho_0} R(\psi') d\omega' d\omega'' \qquad (7)$$

由(2)式，(7)式中之内层积分项莫洛金斯基令为 δ_g

$$\delta_{g(\theta',\lambda')} = \frac{\rho_0^2}{2\pi} \int f(\theta'',\lambda'') \frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{r_0^3} d\omega'' \qquad (8)$$

则(6)式可写成

$$T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = \frac{\rho_0}{4\pi} \int f(\theta',\lambda') S(\psi) d\omega'$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi} \int \delta_{g(\theta',\lambda')} S(\psi) d\omega' \qquad (9)$$

当然按照(9)式(8)式来计算是一个可靠方法，因为它是经过验证的，有其优点，但在计算 $\delta_{g(\theta',\lambda')}$ 时，须同时用重力异常和地形两种资料，下面我们导出两种方法，即在内层面积分中仅含其中一种资料。

一、内层面积分中只用重力异常资料

由(2)式,可将(7)式改写成

$$\mathrm{II} = -\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\int f(\theta'',\lambda'')\frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{\rho_0}$$
$$\cdot\sum i(2i+1)P_i(\cos\psi)d\omega''d\omega'$$
$$=-\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\int f(\theta'',\lambda'')\frac{H(\theta'',\lambda'')}{\rho_0}$$
$$\cdot\sum i(2i+1)P_i(\cos\psi)d\omega''d\omega'$$
$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\int f(\theta'',\lambda'')$$
$$\cdot\sum i(2i+1)P_i(\cos\psi)d\omega''d\omega'$$
$$=-\frac{\rho_0}{4\pi}\int S(\psi)\sum i\left[f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\right]_i d\omega'$$
$$+\frac{\rho_0}{4\pi}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\sum i f_i(\theta',\lambda')d\omega'$$
$$=-\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\sum i S_i(\psi)d\omega'$$
$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\int f(\theta'',\lambda'')\frac{-2\rho_0^3}{r^3(\psi')}d\omega''d\omega'$$
$$=-\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}$$
$$\cdot\sum\frac{i(2i+1)}{i-1}P_i(\cos\psi)d\omega'$$
$$-\frac{\rho_0}{4\pi}\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\int f(\theta',\lambda')\sum\frac{i(2i+1)}{i-1}P_i(\cos\psi)d\omega'$$
$$-\frac{\rho_0}{8\pi^2}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\int f(\theta'',\lambda'')$$
$$\cdot\frac{\rho_0^3}{r^3(\psi')}d\omega''d\omega'$$
$$+\frac{\rho_0}{4\pi}\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\int S(\psi)\sum i f_i(\theta',\lambda')d\omega' \qquad (10)$$

第二项与第四项相消

$$\mathrm{II} = -\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}Q(\psi)d\omega'$$
$$-\frac{\rho_0^4}{8\pi^2}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\int f(\theta'',\lambda'')\frac{1}{r^3(\psi')}d\omega''d\omega' \qquad (11)$$

式中

$$Q(\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2n+1)}{n-1}P_n(\cos\psi) \qquad (12)$$

其值将在后面给出。

将(12)式代入(4)式中，得

$$T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')S(\psi)d\omega' - \frac{\rho_0^4}{8\pi^2}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\int f(\theta'',\lambda'')\frac{1}{r^3(\psi')}d\omega''d\omega' + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}[3S(\psi)-Q(\psi)]d\omega' + \frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')S(\psi)d\omega' \tag{13}$$

二、内层面积分中只用地形资料

由(10)，

$$\mathrm{II} = -\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\sum i\left[S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\right]_i d\omega' + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\sum i\left[S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\right]_i d\omega'$$

$$= -\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\int S(\psi^\Delta)\sum i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega' + \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\theta',\lambda')\int\frac{H(\theta'',\lambda'')}{\rho_0}S(\psi^\Delta)\sum i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'$$

$$= \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\theta',\lambda')\int\frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\cdot S(\psi^\Delta)\sum i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'$$

式中 ψ^Δ 为点 (θ,λ) 至点 (θ'',λ'') 之间的角距，如图 1 所示。

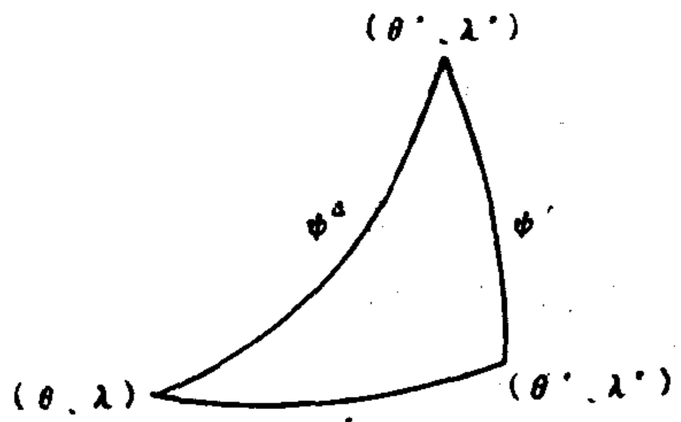


图 1

将(2)式代入

$$\mathrm{II} = -\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\theta',\lambda')\int\frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{\rho_0}S(\psi^\Delta)R(\psi')d\omega''d\omega' \tag{14}$$

如写成平面公式(区域较小时，可视为平面)

$$S(\phi^{\Delta}) \doteq \frac{2\rho_0}{r^{\Delta}}$$
$$R(\phi') = -\frac{2\rho_0^3}{r'^3} \tag{15}$$

则有

$$\mathrm{II} = +\frac{\rho_0}{4\pi^2}\int f(\theta',\lambda')\int \frac{H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\frac{1}{r^{\Delta}}\frac{1}{r'^3}d\sigma''d\sigma' \tag{16}$$

式中 r^{Δ}, r', r 和方位角 α^{Δ}, α', α 之间关系如图 2 所示

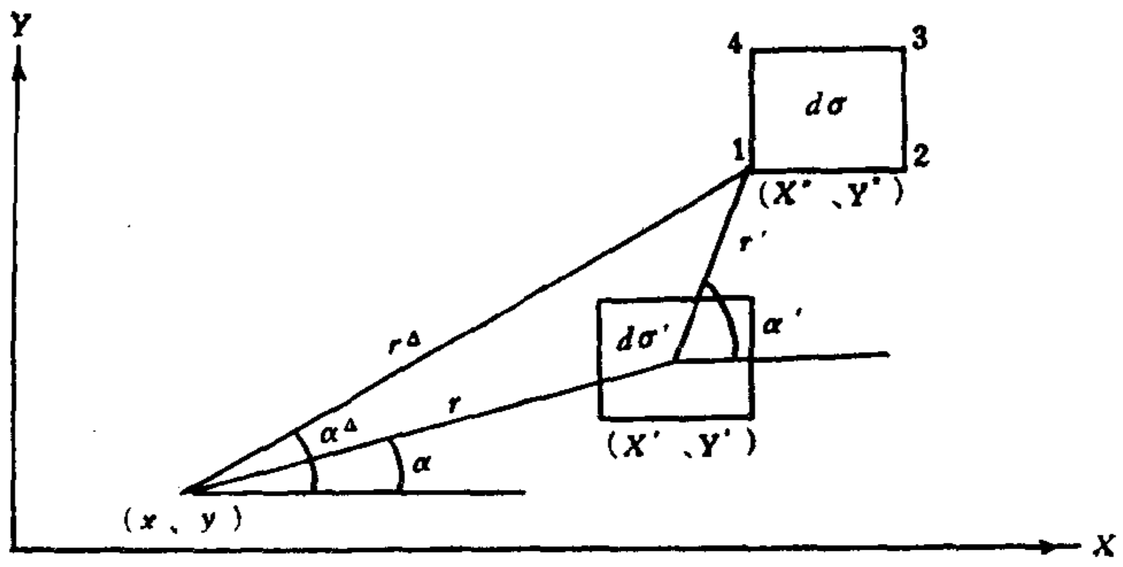


图 2

在此

$$d\sigma'' = dx''dy'' \tag{17}$$
$$d\sigma'' = r'dr'd\alpha' \tag{18}$$
$$d\sigma'' = r^{\Delta}dr^{\Delta}d\alpha^{\Delta} \tag{19}$$
$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2} \tag{20}$$
$$r' = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2} = \sqrt{r^{\Delta 2}+r^2-2rr^{\Delta}\cos(\alpha^{\Delta}-\alpha)} \tag{21}$$
$$r^{\Delta} = \sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2} = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\alpha'-\alpha)} \tag{22}$$

如用(19)式代入(16)式中,得

$$\mathrm{II} = \frac{1}{4\pi^2}\int f(\theta',\lambda')\int [H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')]\frac{1}{r^{\Delta}}\frac{1}{r'^3}r^{\Delta}dr^{\Delta}d\alpha^{\Delta}d\sigma'$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int f(\theta',\lambda)\int \frac{[H(\theta'',\lambda'')-H(\theta',\lambda')\,dr^{\Delta}d\alpha^{\Delta}}{(\sqrt{r^{\Delta 2}+r^2-2r^{\Delta}r\cos(\alpha^{\Delta}-\alpha)})^3}d\sigma' \tag{23}$$

如用(17)式、(20)式代入(16)式中,得

$$\mathrm{II} = \frac{1}{4\pi^2}\int f(x',y')\cdot\int \frac{[H(x'',y'')-H(x',y')]dx''dy''}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2}(\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2})^3}dx'dy' \tag{24}$$

对(23)式、(24)式的计算可用两种办法:

(1) 固定模板法: 即点 (θ,λ), (θ',λ'), (θ'',λ'') (或写成 (x,y), (x',y'), (x'',y'')) 之间的相对位置在模板上是固定的,也即在模板上某一 $\Delta\sigma''$ 相对于 (θ',λ') 点和某

一 $\Delta\sigma'$ 相对于 (θ, λ) 点的位置是固定的，此 $\Delta\sigma''$ 和 $\Delta\sigma'$ 的大小也是不变的，因此，对各 $\Delta\sigma''$ 和 $\Delta\sigma'$ 之系数也是固定的。但在地形图上当 (θ', λ') 点和 (θ, λ) 点变更时，每一 $\Delta\sigma''$ 和 $\Delta\sigma'$ 内的平均高 $H(\theta'', \lambda'')$ 的取值将随 $\Delta\sigma''$ 和 $\Delta\sigma'$ 在地形图上位置改变而须重取，工作量是十分浩繁的。代替的办法是取方块(方形等面积)为 $\Delta\sigma''$，$\Delta\sigma'$ 的形状，在地形图上量出相应大小方块的平均高，再据此绘制等值图，此时模板的系数也应以此种方法来给出，当模板移动和转动后，可内插出模板上的计算点（即方块之积分重心）之平均高，再乘以相应系数，相加即得最后结果。用电子计算机时，可将地形图上量取的方块之坐标及平均高输入机内，内插各计算点上之平均高的工作由电子计算机根据坐标来进行。

(2) 直接计算法：利用(24)式，式中 $H(x'', y'')$ 是在地形图上直角坐标方格内量取每方块到计算点之 $\frac{1}{r^{\Delta}}$，$\frac{1}{r'^{3}}$ 是根据计算点和方块的坐标计算得出，为了简便可近似取方块四个角的坐标来计算 $\frac{1}{r^{\Delta}}$，$\frac{1}{r'^{3}}$，然后平均，作为该方块之 $\frac{1}{r^{\Delta}}$，$\frac{1}{r'^{3}}$。方块之面积为 $\Delta x''$，$\Delta y''$，对于电子计算机来说只要给出了被研究点之坐标 (x', y') 计算 r^{Δ}，r' 及其函数是不难的。将(23)式或(24)式代入(4)式即可算出 $T_{(\rho_N,\theta,\lambda)}$。

三、用重力异常的垂直梯度将二重面积分化为一重面积分

用 V 表示地球重力位，用 U 表示地球正常重力位，当两者所代表之球体质量相等，重心重合，转速相等，转轴重合时，$V-U$ 是球外空间的调和正则函数，则 $\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(V-U)$（在地形面上为 $\rho(g-r)$）也是调和正则函数，因此，$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(V-U)$ 在球体外一点之函数值可用该球体表面上之值来求定。

现用 $f(\rho, \theta, \lambda)$ 来表示外空间任一点 (ρ, θ, λ) 上的重力异常，则可写成

$$\rho f(\rho, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\sum\frac{\rho_0^{n+2}}{\rho^{n+1}}\int f(\rho_0, \theta', \lambda')(2n+1)P_n(\cos\psi)d\omega'$$

$$f(\rho, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\sum\frac{\rho_0^{n+2}}{\rho^{n+2}}\int f(\rho_0, \theta', \lambda')(2n+1)P_n(\cos\psi)d\omega' \qquad (25)$$

(25)式对 ρ 微分，得

$$\frac{\partial f(\rho, \theta, \lambda)}{\partial\rho} = -\sum\frac{\rho_0^{n+2}}{\rho^{n+3}}(n+2)f_n(\rho_0, \theta, \lambda) \qquad (26)$$

(25)式令 $\rho' \to \rho_N$ 时，有

$$f(\rho_N, \theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\int f(\rho, \theta', \lambda')\sum\frac{\rho_0^{n+2}}{\rho_N^{n+2}}(2n+1)P_n(\cos\psi)d\omega'$$

$$= \sum\frac{\rho_0^{n+2}}{\rho_N^{n+2}}f_n(\rho_0, \theta, \lambda)$$

又 $f(\rho_N, \theta, \lambda) = \sum f_n(\rho_N, \theta, \lambda)$

$$f_n(\rho_0, \theta, \lambda) = \frac{\rho_N^{n+2}}{\rho_0^{n+2}}f_n(\rho_N, \theta, \lambda)$$

$$= \left[1 + (n+2)\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right] f_n(\rho_N,\theta,\lambda) \tag{27}$$

将(27)式代入(26)式中,得

$$\frac{\partial f(\rho,\theta,\lambda)}{\partial\rho} = -\frac{1}{\rho_0}\sum\frac{\rho_0^{n+3}}{\rho^{n+3}}(n+2)\left[1+(n+2)\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right] f_n(\rho_N,\theta,\lambda)$$

当 $\rho \to \rho_N$ 时

$$\left.\frac{\partial f(\rho,\theta,\lambda)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_N} = \frac{\partial f(\rho_N,\theta,\lambda)}{\partial\rho}$$

$$= -\sum\frac{1}{\rho_0}\left[1-(n+3)\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right](n+2)$$

$$\cdot\left[1+(n+2)\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right] f_n(\rho_N,\theta,\lambda)$$

$$= -\sum\frac{1}{\rho_0}(n+2) f_n(\rho_N,\theta,\lambda)$$

$$+\sum\frac{1}{\rho_0}(n+2)\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0} f_n(\rho_N,\theta,\lambda)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\left[1-\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right]\sum n f_n(\rho_N,\theta,\lambda)$$

$$-\frac{2}{\rho_0}\left[1-\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right] f(\rho_N,\theta,\lambda) \tag{28}$$

由此得

$$\sum n f_n(\rho_N,\theta,\lambda) = -\rho_0\left[1+\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right]\left\{\frac{\partial f(\rho_N,\theta,\lambda)}{\partial\rho}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\rho_0}\left[1-\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\right] f(\rho_N,\theta,\lambda)\right\}$$

$$= -\rho_0\left.\frac{\partial f(\rho,\theta,\lambda)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_N} - 2f(\rho_N,\theta,\lambda) \tag{29}$$

将(29)式代入(10)中,得

$$\mathrm{II} = -\frac{\rho_0}{4\pi}\int S(\psi)\sum i\left[f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\right]_i d\omega'$$

$$-\frac{\rho_0^2}{4\pi}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\frac{\partial f(\rho_N,\theta,\lambda)}{\partial\rho}d\omega'$$

$$-\frac{2\rho_0}{4\pi}\int S(\psi)\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0} f(\theta',\lambda')d\omega'$$

$$= -\frac{\rho_0^2}{4\pi}\int\frac{\partial f(\rho_N,\theta',\lambda')}{\partial\rho}\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0} S(\psi)d\omega'$$

$$-\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}[Q(\psi)+2S(\psi)]d\omega' \tag{30}$$

(30)式中之 $\frac{\partial f(\rho_N,\theta,\lambda)}{\partial\rho}$ 为地面上重力异常的垂直梯度,可直接测出,现在仪器的精度为 20 微伽,而重力的垂直梯度,每米为 300 微伽,在同一点上只变动仪器高度,时间很短,

仪器稳定，上下多读几次，可望能达到要求，故值得一试。

重力的垂直梯度也可用地面上的重力异常计算得出，由(28)式

$$\frac{\partial f(\rho_N, \theta, \lambda)}{\partial \rho} = -\frac{1}{4\pi\rho_0}\left[1 + \frac{H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\right]\int f(\theta', \lambda')M(\psi)d\omega' \tag{31}$$

式中

$$M(\psi) = \sum(n + 2)(2n + 1)P_n(\cos\psi) \tag{32}$$

不过将(31)式代入(30)式中，又须进行二重面积分，这不是本文的目的，但可起检查作用。

将(30)式代入(4)式中，得

$$\begin{aligned} T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = {} & \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega' \\ & - \frac{\rho_0^2}{4\pi}\int \frac{\partial f(\rho_N, \theta', \lambda')}{\partial \rho}\frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)d\omega' \\ & + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{\rho_0}[S(\psi) - Q(\psi)]d\omega' \\ & + \frac{H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega' \end{aligned} \tag{33}$$

由(43)式 $S(\psi) \doteqdot Q(\psi)$，故(33)右端第三项及第四项可略去。

四、用改变积分核的办法将二重面积分化为一重面积分

仍用惯用符号：

$$S(\rho, \psi) = \sum \frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}}\frac{2n + 1}{n - 1}P_n(\cos\psi)$$

则

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho_0}\int \rho_0 S(\rho, \psi)d\rho \\ & = \sum \frac{\rho_0^n}{n\rho^n}\frac{2n + 1}{n + 1}P_n(\cos\psi) \\ & = \sum \frac{1}{n}\left(1 + \frac{H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\right)^{-n}\frac{2n + 1}{n - 1}P_n(\cos\psi) \\ & = \sum \frac{1}{n}\left(1 - n\frac{H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\right)\frac{2n + 1}{n - 1}P_n(\cos\psi) \\ & = \sum \frac{2n + 1}{n(n - 1)}P_n(\cos\psi) - \frac{H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\sum \frac{2n + 1}{n + 1}P_n(\cos\psi) \end{aligned}$$

由上式移项得

$$\begin{aligned} & \frac{H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\sum \frac{2n + 1}{n - 1}P_n(\cos\psi) \\ & = \sum \frac{2n + 1}{n(n + 1)}P_n(\cos\psi) - \sum \frac{\rho_0^n}{n\rho^n}\frac{2n + 1}{n - 1}P_n(\cos\psi) \end{aligned} \tag{34}$$

将(34)代入(10)中,得

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} = & -\frac{\rho_0}{4\pi}\int\sum\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\sum i\left[f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\right]_i d\omega' \\
& +\frac{\rho_0}{4\pi}\int\sum\frac{2n+1}{n(n-1)}P_n(\cos\psi)\sum i f_i(\theta',\lambda')d\omega' \\
& -\frac{\rho_0}{4\pi}\int\sum\frac{2n+1}{n-1}\frac{\rho_0^n}{\rho^n}P_n(\cos\psi)\sum i f_i(\theta',\lambda')d\omega' \\
= & -\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')}{\rho_0}\sum\frac{n(2n+1)}{n-1}P_n(\cos\psi)d\omega' \\
& +\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\sum\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)d\omega' \\
& -\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\sum\frac{\rho_0^n}{\rho^n}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)d\omega' \\
= & -\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}Q(\psi)d\omega' \\
& -\frac{\rho_0}{4\pi}\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\int f(\theta',\lambda')Q(\psi)d\omega' \\
& +\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')S(\psi)d\omega' \\
& -\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\rho S(\rho,\psi)d\omega' \qquad (35)
\end{aligned}$$

将(35)代入(4)

$$\begin{aligned}
T_{(\rho_N,\theta,\lambda)} = & \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')S(\psi)d\omega' \\
& +\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')[S(\psi)-\rho S(\rho,\psi)]d\omega' \\
& +\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\frac{H(\theta',\lambda')-H(\theta,\lambda)}{\rho_0}[3S(\psi)-Q(\psi)]d\omega' \\
& +\frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\theta,\lambda)}{\rho_0}\int f(\theta',\lambda')[S(\psi)-Q(\psi)]d\omega' \qquad (36)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
\rho S(\rho,\psi) = & \frac{1}{\rho_0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi)-\frac{1}{\rho} \\
= & \frac{2\rho}{r}-\frac{5\rho_0\cos\psi}{\rho}-\frac{3r}{\rho}-\frac{3\rho_0\cos\psi}{\rho}\ln\frac{r+\rho-\rho_0\cos\psi}{2\rho} \qquad (37)
\end{aligned}$$

(37)式中去掉了一阶项,因 $n=1$ 时不成立,对重力扰动位的混合边界问题存在的条件必须满足:

$$f_1(\theta,\lambda)=\frac{3}{4\pi}\int f(\theta',\lambda')\cos\psi d\omega'=0 \qquad (38)$$

要使(38)式真正得到满足是不易的,首先因为 $f(\theta,\lambda)$ 是地形面上的边界条件而不是球面上的边界条件,只不过是按球谐函数的方法展成球面函数的级数而已。要满足(38)式

如 $f_1(\theta, \lambda) \neq 0$，只能令 $S(\psi)$ 中 $5\cos\psi$ 项去掉才行，虽然在求 $S(\psi)$ 时已考虑到去除一阶项，但求出的结果中还是存有 $\cos\psi$ 项。一阶项的物理意义是两种球体的重心不重合，因此可在积分核中去掉 $\cos\psi$ 项，使(38)式得以成立，其不符值可另用重心坐标来表示，可参看文[4](V. 14)式。

由(43)式知，$S(\psi) \doteq Q(\psi) \doteq \frac{2\rho_0}{r_0}$ (36) 式第四项为零。严格说来，根据(43)式和(37)式，$S(\psi) - Q(\psi) = 3\cos\psi$，考虑到(38)式、(36)式右端第四项亦应为零。

根据文[1](23)式，如果在以半径为 ρ_0 的球面上的函数值为 $F(\theta', \lambda')$，则可求出此球外空间任一点上的函数值，其中包括求定在地形面上的函数值 $f(\theta', \lambda') = g - r$，现在的问题是此问题的反问题，即在球外空间设有吸引物质，已知 $f(\theta', \lambda')$，求定 $F(\theta', \lambda')$，当求出 $F(\theta', \lambda')$ 后，外空间任意点上的扰动位都可确定，但其中对于计算的球半径 ρ_0 并没有假定为某一固定的数值，即计算球面不一定选择与大地水准面重合，在海拔较高地区计算球的半径可以扩大，甚至通过被研究点 $\rho_0 = R + H(\theta, \lambda)$，这时积分公式(36)是能成立的，但对级数形式一般要满足 $\rho_0 < \rho_N(\theta, \lambda)$，故其收敛问题应予考虑。

在小范围内，球面可以当成平面。则

$$\rho = R + H(\theta', \lambda') \quad \rho_0 = R + H(\theta, \lambda)$$

$$r = \sqrt{r_0^2 + [H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]^2}$$

我们看出(36)式中右端之第二项之积分核为两积分核之差。$[S(\psi) - \rho S(\rho, \psi)]$ 如能化简，则(36)式的计算就很容易了。

当积分区域较小时，$S(\rho, \psi)$，$S(\psi)$ 我们均取主项，并当成平面

$$\rho S(\rho, \psi) = \frac{2\rho}{r}$$

$$S(\psi) = \frac{2\rho_0}{r_0}$$

则

$$S(\psi) - \rho S(\rho, \psi) = \frac{2[R + H(\theta, \lambda)]}{r_0} - \frac{2[R + H(\theta', \lambda')]}{r}$$

按莫洛金斯基的办法[2]有

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{r_0}\right]^2 + \cdots\right\}$$

则

$$S(\psi) - \rho S(\rho, \psi)$$

$$= \frac{2}{r_0}[R + H(\theta, \lambda)] - \frac{2}{r_0}[R + H(\theta, \lambda)]$$

$$\cdot \left[1 + \frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{R + H(\theta, \lambda)}\right]$$

$$\cdot \left\{1 - \frac{[H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]^2}{2r_0^2}\right\}$$

$$= \frac{[R + H(\theta, \lambda)]\,[H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]^2}{r_0^3} - \frac{2[H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]}{r_0} + \frac{[H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]^3}{r_0^3} \tag{39}$$

将(39)代入(36)中，并考虑到 $Q(\psi) \doteq \frac{2\rho_0}{r_0}$，有

$$\begin{aligned} T_{(\rho_N, \theta, \lambda)} &= \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega' \\ &+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{[H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]^2}{r_0^3}\rho_0 d\omega' \\ &- \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{2[H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]}{r_0}d\omega' \\ &+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')\frac{2[H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)]}{r_0}d\omega' \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\theta', \lambda')S(\psi)d\omega' \\ &- \frac{\rho_0}{8\pi}\int f(\theta', \lambda')\left[\frac{H(\theta', \lambda') - H(\theta, \lambda)}{\rho_0}\right]^2 R(\psi)d\omega' \end{aligned} \tag{40}$$

五、计算积分核

前已列出

(1) $$S(\rho, \psi) = \frac{2}{r} - \frac{5\rho_0\cos\psi}{\rho^2} - \frac{3r}{\rho^2} - \frac{3\rho_0\cos\psi}{\rho^2}\ln\frac{r + \rho - \rho_0\cos\psi}{2\rho}$$ 即(37)

(2) $$S(\psi) = \frac{2\rho_0}{r_0} - 5\cos\psi - \frac{3r_0}{\rho_0} - 3\cos\psi\ln\frac{r_0 + \rho_0 - \rho_0\cos\psi}{2\rho_0} \tag{41}$$

$$= \cos\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) \tag{42}$$

以上两式中为 0 阶及 2 阶以上各项之和，不包含一阶项。

(3) $$R(\psi) = -\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}$$ 即(2)

(4) $$Q(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2n+1)}{n-1}P_n(\cos\psi)$$ 即(12)

由于 n 不能等于 1，故 1 阶舍去。

$$Q(\psi) = 0 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(2n+1)}{n-1}P_n(\cos\psi)$$

因

$$\rho S(\rho, \psi) = \sum\frac{2n+1}{n-1}\frac{\rho_0^n}{\rho^n}P_n(\cos\psi)$$

故

$$Q(\psi)=\left[\sum\frac{n(2n+1)}{n-1}\frac{\rho_0^n}{\rho^n}P_n(\cos\psi)\right]_{\rho=\rho_0}$$

$$=-\left[\rho\frac{d}{d\rho}\rho S(\rho,\psi)\right]_{\rho=\rho_0}$$

将(37)式代入

$$Q(\psi)=-\left[\frac{2\rho}{r}-\frac{2\rho^2(\rho-\rho_0\cos\psi)}{r^3}+\frac{5\rho_0\cos\psi}{\rho}-\frac{3(\rho-\rho_0\cos\psi)}{r}\right.$$

$$\left.+\frac{3r}{\rho}+\frac{3\rho_0\cos\psi}{\rho}-\frac{3\rho_0\cos\psi}{r}+\frac{3\rho_0\cos\psi}{\rho}\ln\frac{r+\rho-\rho_0\cos\psi}{2\rho}\right]_{\rho=\rho_0}$$

$$=\frac{2\rho_0}{r_0}-8\cos\psi-\frac{3r_0}{\rho_0}-3\cos\psi\ln\frac{r_0+\rho_0-\rho_0\cos\psi}{2\rho_0}\qquad(43)$$

(5) 求 $M(\psi)$

$$M(\psi)=\sum(n+2)(2n+1)P_n(\cos\psi)\qquad\text{即(32)}$$

因

$$\frac{1}{r}=\frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}}P(\cos\psi)\qquad\rho>\rho_0$$

故有

$$\sum(n+2)(2n+1)\frac{\rho_0^n}{\rho^n}P_n(\cos\psi)$$

$$=-\rho\frac{1}{r}+\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)+2\rho^3\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$=2\rho^3\left[\frac{3(\rho-\rho_0\cos\psi)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right]+\frac{\rho}{r^3}(\rho-\rho_0\cos\psi)-\frac{\rho}{r}$$

当 $\rho=\rho_0$ 时

$$M(\psi)=\sum(n+2)(2n+1)P_n(\cos\psi)$$

$$=\frac{6\rho_0^5}{r_0^5}(1-\cos\psi)^2-\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}+\frac{\rho_0^3}{r_0^3}(1-\cos\psi)-\frac{\rho_0}{r_0}$$

因

$$(1-\cos\psi)=\frac{r_0^2}{2\rho_0^2}$$

故

$$M(\psi)=-\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}+\frac{\rho_0}{r_0}$$

综上所述，计算重力扰动位有(10)，(14)，(24)，(33)，(40)五类公式可供选用。后面两类仅进行一次面积分，尤其是(40)式形式更为简单，如理论上能成立，将使计算大为简化。

参 考 文 献

[1] 骆鸣津：用球函数法解算重力测量的基本微分方程，测量与地球物理集刊，第二号，1965 年，科学出版社。

[2] Молоденский, М. С., Еремеев, В. Ф., Юркина, М. И., Метод изуцения внешнего гравитационного Поля и Фигуры Земли, *Труды цниигаик*, **131**, 1960,

[3] 方俊：重力测量与地球形状学，下册，1975 年，科学出版社。

SIMPLIFIED METHOD FOR COMPUTING DISTURBING POTENTIAL

Luo Mingjin

(*Zhengzhou Seismological Bureau*)

Abstract

In this paper, on the basis of an equivalent sphere of gravimetric potential and by expanding the power in accordance with the radius, the fundamental differential equation of gravity has been solved; and by integrating the surfaces of gravity anomaly and topography, five formulas for computing the disturbing potential have been derived. In these formulas, using the methods of "vertical gravimetric gradient" and the "changing of integral kernel", the double surfaces integration can be reduced to a single one. And especially the latter may be greatly cut down the amount of work in computation. Hence this study will play a certain role both in theory and practice.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

略论海上重力测线的布设*

张赤军　毛慧琴　周景明

摘　　要

近年来海上重力测量正大力开展，如何布设测线(点)才能满足重力大地测量学的要求，仍是值得研究的问题。本文从一些实际资料出发，利用最小二乘拟合推估原理，对 1°×1° 平均异常及垂线偏差的误差作了分析，在顾及垂线偏差二次变化率的基础上对它的内插误差也进行了研究。认为对一般的海域而言，在 1°×1° 内布设三条测线，可使平均异常达到 ±3 毫伽、垂线偏差达到 ±5″ 的精度。

一、1°×1° 平均异常的精度估计

1. 估算公式

边长为 a 和 b 的矩形方块的平均重力异常为

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{ab}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\Delta g(x, y)dxdy$$

根据这一公式，必须在矩形内测定很多点上的重力值，用数值积分求得平均重力异常。但在海上是沿着测线施测重力，为尽量减少工作量，测线的布设不可能太密，究竟在 1° × 1° 矩形方块内至少需要几条测线才能达到某一精度？ 为此，对 1° × 1° 方块平均重力异常的误差作一估计。

一般在 1° × 1° 方块内至多测四条测线，从这点出发我们在估算误差时把这样的方块分为 16 个子块，即每个子块的经纬度间距为 15′。

平均重力异常的精度估算方法与推估未知点的方法类同，在最小二乘拟合推估中，推估点 p 的均方差为

$$m_p^2 = C_0 - C_p^T C^{-1} C_p \qquad (1)$$

式中 C_0 为重力异常的方差，C_p 为推估点与已知点重力异常的协方差阵，C_p^T 为其转置矩阵，C 为已知点之间重力异常的协方差阵，C^{-1} 为其逆矩阵。

现假设用平均重力异常代替推估点，类似(1)式，则平均重力异常的均方误差为

$$m_{\overline{\Delta g}}^2 = \bar{\bar{C}} - C_{\overline{\Delta g}}^T C^{*-1} C_{\overline{\Delta g}} \qquad (2)$$

式中 $\bar{\bar{C}}$ 为平均重力异常的方差，可由许多方块的平均重力异常统计得到，也可由其他方法求得，它的定义如下：

---

* 1981 年 4 月收稿。参加这项工作的还有宋明、蔡少华、刘燕平、管晓荣。

$$\bar{\bar{C}} = M(\overline{\Delta g}^2)$$

式中 $C_{\overline{\Delta g}}$ 为平均重力异常与已知子块间的协方差阵，$C^T_{\overline{\Delta g}}$ 为其转置矩阵。且

$$C^T_{\overline{\Delta g}} = (c_{\overline{\Delta g}_1}, c_{\overline{\Delta g}_2}, \cdots, c_{\overline{\Delta g}_m})$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{j1}, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{j2}, \cdots, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jm}\right)$$

$$C^* = \begin{pmatrix} c'_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c'_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c'_{mm} \end{pmatrix}$$

为已知子块的协方差阵，m 为已知的子块数，n 为 $1^\circ \times 1^\circ$ 方块内所有子块数，C^{*-1} 为 C^* 之逆矩阵，由于各子块是以点的重力异常代表该子块的平均重力异常，所以在方差 c'_{ii} 中必须加上代表误差，即矩阵 C^* 中的对角线上的元素 $c'_{11}, c'_{22}, \cdots, c'_{mm}$ 为相应子块的平均重力异常的方差加代表误差，如

$$c'_{ii} = c_0 + \delta g^2 \tag{3}$$

式中 δg 为子块的代表误差，今假定它是子块边长的函数，且

$$\delta g = k(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta g_i - \overline{\overline{\Delta g}})^2}{n-1}} \tag{4}$$

式中 k 为代表误差系数，可根据实测重力资料统计求得。$\overline{\overline{\Delta g}}$ 为边长 x、y 的矩形内异常的平均值。矩阵中各元素——子块的协方差也可以根据实际重力异常统计得到。方差 $c_{11}, c_{22}, \cdots, c_{mm}$ 均可以 c_0 表示。

$$c_0 = \overline{\Delta g^2} - \overline{\Delta g}^2 \tag{5}$$

式中 $\overline{\Delta g^2}$ 为各子块平均空间异常的平方的平均值，$\overline{\Delta g}^2$ 为其平均值的平方。

协方差可表示为距离 S 的函数，常以简单形式表示(此处规定为正定函数)。

$$C(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots \tag{6}$$

或以相关函数的形式表示：

$$R(s) = \frac{C(s)}{C_0} = 1 + r_1 s + r_2 s^2 + r_3 s^3 + \cdots \tag{7}$$

也可以采用球谐函数表示

$$C(\psi) = A\sum_{N}^{\infty} C_n \left(\frac{R_B^2}{r_p r_q}\right)^{n+2} p_n(\cos\psi) \tag{8}$$

式中 r_p、r_q 为空间两点 p、Q 的地心向径，ψ 为 r_p 和 r_q 之间的角距，R_B 为小于地球平均半径的某一球半径，$p_n(\cos\psi)$ 为勒让德多项式，A 为常数，C_n 为一系数，可根据卫星资料拟合得到，一般取 $C_n = \dfrac{(n-1)}{(n-2)(n-24)}$，然而(8)式的计算较为繁复，故未用。

由于海洋上重力资料不多，不易作出较为可靠的统计，我们暂采用了许尤南计算的大陆平原地区的相关系数，该结果是以点值统计得出，而我们则取之为子块的平均值，设子

块的平均空间异常的方差为 c_0，其协方差函数为

$$C(s) = c_0 R(s)$$

协方差还可以用以下数学模型来描述，它符合正态平稳过程

$$c_{ij} = c_0 e^{-as_{ij}} \tag{9}$$

而 $c_{ij} = \overline{\Delta g_i \cdot \Delta g_j} - \overline{\Delta g_i} \cdot \overline{\Delta g_j}$ 为距离等于 s_{ij} 的 i 点和 j 点之间的协方差，a 为正常数，s_{ij} 为上两点间的距离，$\overline{\Delta g_i \cdot \Delta g_j}$ 为距离等于 s_{ij} 的重力异常乘积的平均值，$\overline{\Delta g_i} \cdot \overline{\Delta g_j}$ 的意义类同。

我们分别在太平洋、大西洋中的几个海域（I, II, III）依（9）式统计得到如下的协方差：对于海域（I），$c_{ij} = 303e^{-0.0436s_{ij}}$，海域（II），$c_{ij} = 88e^{-0.014s_{ij}}$，海域（III），$c_{ij} = 137e^{-0.020s_{ij}}$。

2. 估算公式

从上可知，要估算平均重力异常的精度，必须事先用实测资料统计出代表误差 δg 和子块的平均异常的方差 c_0 和协方差 c_{ij}。为此，我们利用了太平洋中三个海域的重力资料推求得代表误差系数 k，其值在 0.90—1.04 之间，显然该值比大陆上山区的为小。

c_0 和 c_{ij} 的计算采用了两种方法，一是由(5)式求 c_0，用(7)式求 c_{ij}，（以下称方法 1）；另一是由统计得到的(9)式求出 c_0 和 c_{ij}，（以下称方法 2）。用上述结果分别对四种情况进行估算，即在 1° × 1° 方块内设用 16 个点、12 个点、8 个点和 4 个点，分别代替四条测线、三条测线、二条测线和一条测线，依(2)式求得下列误差。

表 1　测线密度与平均异常的误差

方　法	c_0	a	δg	4 条测线	三条测线	二条测线	一条测线
方法 1	151		±9.5	0 毫伽	±1.7 毫伽	±2.2 毫伽	±4.7 毫伽
方法 2	303	0.0436	±8.9	±0.3 毫伽	±2.3 毫伽	±3.3 毫伽	±4.9 毫伽

在计算时都是假定 1° × 1° 内均匀分布 16 个子块（15′ × 15′），每个子块内只有一点，由观测或推估求出其重力异常值。从表中可以看出，在海洋上，一般在 1° × 1° 方块内布设三条测线，平均异常的精度可以优于 ±3 毫伽。

二、海上垂线偏差的内插误差

1. 垂线偏差的误差

海上垂线偏差的误差，一方面与重力异常的变化有关，也与布设测线的间距有关，它的内插误差也是如此。

如果均匀分布的测点遍及全球，则垂线偏差的误差：

$$M_\theta = \pm \frac{\rho''}{2\pi\gamma} \delta g_{km} (\Sigma f_{\mu m}^2)^{1/2} + M_{\theta_0} \tag{10}$$

$$f_{km} = \text{Arsh}\frac{y_m}{|x_{k-1}|} + \text{Arsh}\frac{y_{m-1}}{|x_k|} - \text{Arsh}\frac{y_{m-1}}{|x_{k+1}|} - \text{Arsh}\frac{y_m}{|x_k|} \tag{11}$$

式中 x, y 为距计算点之纵横距离，δg_{km} 为重力异常的代表误差，k, m 为其脚标数，如左图 1 所示，$\rho = 206265''$，γ 为正常重力值，M_{θ_0} 为中央区域内垂线偏差的误差。

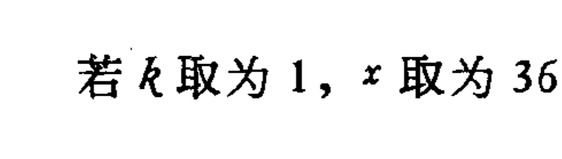


图 1

如取方块的边长为 $2l$（点距）可根据（11）式计算 f_{km} 值。由此可求出各环带内重力异常的误差对计算点的垂线偏差的影响。（见表 2）

设全球每隔 33 公里测一点，则在 l 环以外，即全球由此所产生的误差为 $\pm 0.063\delta g$。

表 2 均匀布点对垂线偏差的影响

环 带	中误差	累积误差
l—$3l$	$\pm 0.059\delta g$	
$3l$—$5l$	± 0.019	$\pm 0.062\delta g$
$5l$—$7l$	± 0.010	± 0.063
$7l$—$9l$	± 0.007	± 0.063
$9l$—$11l$	± 0.005	± 0.063

若 k 取为 1，x 取为 36 公里，则

$$\delta g = \pm 2k\sqrt{x} = \pm 12 \text{ 毫伽}$$

$$\pm 0.063\delta g = \pm 0''.76$$

对于 M_{θ_0} 的估计，若在赤道附近的 $1° \times 1°$ 方块内布设三条测线，线距为 36 公里，设两条测线的中点为计算点，则在 18 公里的范围内无一测点，其误差可按经验公式计算

$$M_{\theta_0} = \pm 0.15 r_0^{3/4} = \pm 0.15 \times 18^{3/4} = \pm 1''.3$$

将上列数值代入(10)式有

$$M_\theta = (0.76^2 + 1.3^2)^{1/2} = \pm 1''.5$$

以上是假定全球每隔 36 公里均匀布点的情形，实际上，目前特别在海洋还远远不能作到。今设在 3300 公里内能按上述方法均匀布满测点，在其外用一有限阶。例如 18 阶或更高阶的球谐函数系数表达重力场，其截断误差为 $\pm 0''.04$，由于球谐函数的系数不精确(如 18 阶)引起的误差为 $\pm 0''.15$，以上两项均比较小。

但是如果在 3300 公里以外既无重力资料，也不用球谐函数的系数来计算，则可引起 $\pm 3''.0$ 的误差，因此这一点不可忽视。

综合前述，可得垂线偏差的误差

$$M_\theta = (1.5^2 + 0.04^2 + 0.15^2)^{1/2} = \pm 1''.5$$

以上只是讨论垂线偏差某一分量的误差，它有两个分量 (ξ, η)，今设 $M_\theta = M_\eta = M_\xi$，并设总的垂线偏差的误差

$$M_\theta = \sqrt{2}\, M_\theta = \sqrt{2} \times 1''.5 = \pm 2''.2 \tag{12}$$

在实际工作中，每隔一定距离(如 20 公里等)计算一点，可根据这些计算点来内插邻

近一点，下面将讨论内插点垂线偏差的误差。

2. 内插误差

内插或推估误差分两种情况讨论。

(1) 直线内插误差，设在两个已知点中内插一点，其误差是由略去二次以上各项引起的，现假定全部由于二次项引起的误差。

若已知点 A，B 中有一待估点 i（设在 AB 的中点），如图 2。则

$$\vartheta_i = \vartheta_A + \frac{d\vartheta}{ds} S + \frac{1}{2} \frac{d^2\vartheta}{ds^2} S^2 \tag{13}$$



图 2

同理

$$\vartheta_i = \vartheta_B - \frac{d\vartheta}{ds} S + \frac{1}{2} \frac{d^2\vartheta}{ds^2} S^2 \tag{14}$$

显然，

$$\vartheta_i = \frac{1}{2} (\vartheta_A + \vartheta_B) + \frac{1}{2} \frac{d^2\vartheta}{ds^2} S^2 \tag{15}$$

式中

$$S = Ai = iB$$

实际上，只是根据两点对其中一点作直线内插，有

$$\vartheta_i' = \frac{1}{2} (\vartheta_A + \vartheta_B) \tag{16}$$

由(15)式减(16)式得 $\Delta\vartheta_i$，此即为二次项引起的误差，则

$$\Delta\vartheta_i = \frac{1}{2} \frac{d^2\vartheta}{ds^2} S^2 \tag{17}$$

如果我们知道垂线偏差的二次变化率，则可计算出 $\Delta\vartheta_i$。$\frac{d^2\vartheta}{ds^2}$ 因地而异，一般应在不同海域先计算出剖面上各点的垂线偏差，当然，在计算点的周围直至离计算点甚远地区都要有详细的重力资料，使计算误差尽量减小以致可以忽略。

我们对两个海域的垂线偏差进行了计算，这两个海域的重力异常都较复杂。计算方法仍采用圆模板的威尼-曼尼兹公式，最外环只算到 102.5 公里，其外因缺资料无法计算，可以认为对相距不远的两个计算点而言，其外的影响几乎相等，在计算二次变化率时视为常数。内半径为 5 公里，5—102.5 公里共分为 8 个环带。对于海域 (I) 共计算 12 点，相邻两点距离为 26.2 公里，由(17)式计算得 $d^2\vartheta/ds^2$，其中最大的为 0.″012/公里^2。对于海域 (II) 计算了 7 点，点距为 22.2 公里，最大的二次变化率为 0.″007/公里^2。

在实际计算垂线偏差时，由于计算点周围的测点不可能很密且有观测误差，所以在内插其中任一点时仍需顾及已知点的误差，由(15)式可得内插误差为

$$M^2_{\Delta\vartheta} = \frac{1}{4}\left[M^2_{\vartheta A} + M^2_{\vartheta B} + \frac{d^2\vartheta}{ds^2} S^4\right] \tag{18}$$

令

$$M_{\vartheta A} = M_{\vartheta B} = 2''.2\ d^2\vartheta/ds^2 = 0''.012/\text{公里}^2,\quad \text{当 } S = 26.2 \text{ 公里时},$$

$$M_{\Delta\vartheta} = (2.42 + 16.81)^{1/2} = \pm 4''.4。$$

(2) 最小二乘拟合推估的误差

由若干已知点推估(内插)任一未知点垂线偏差的误差可从(1)式得到,所不同的是将式中的重力异常改为垂线偏差。同样它的协方差也可表达为 $c_{ij} = C_0 e^{-\alpha d}$, C_0 和 α 也是根据许多实际资料统计得到,可惜在海洋上这方面的资料不多,已经见到的如印尼一菲律宾附近海域,那里垂线偏差变化剧烈,它的统计结果为

$$c_{ij} = (10''.7)^2 e^{-\frac{s_{ij}}{138}} \tag{19}$$

在加拿大附近海域的结果为

$$c_{ij} = (4''.4)^2 e^{-\frac{s_{ij}}{70}} \tag{20}$$

在欧洲北海的结果为

$$c_{ij} = (2''.6)^2 e^{-\frac{s_{ij}}{140}} \tag{21}$$

结合(1),(19),(20),(21)四式,同时考虑到对角阵上的元素 $c'_{ij} = c_0 + (2''.2)^2$, $2''.2$ 为已知点的误差,并用最靠近四个已知点 A, B, C, D 作推估, 而推估点 P 在其中央,点距如图 3 所示,得印尼一菲律宾海域 $m_p = \pm 3''.1$, 加拿大附近海域 $m_p = \pm 2''.2$,北海的$m_p = \pm 1''.7$。

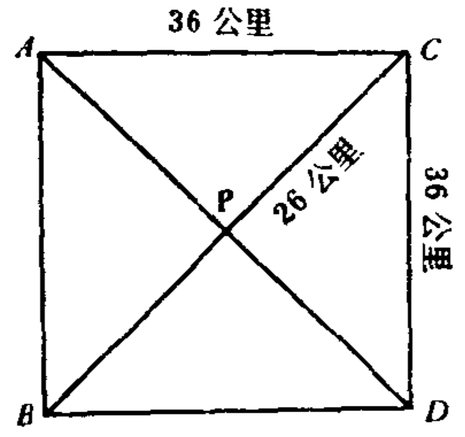


图 3

由以上可知,在 1° × 1° 方块内布设三条测线,即线距在 36 公里以下, 无论用直线内插或最小二乘拟合推估, 其误差均小于 ±5″, 当然, 在某些深海沟和海岭海域的情况仍需进一步研究。 实际上这些只占海洋的一小部分, 例如在东经 90°—150°, 纬度 −15°—45° 之间上述海域约占四分之一。

综上所述,在广阔的非海沟和海岭区域,在 1° × 1° 矩形内布设三条测线,可使平均空间异常达到 ±3 毫伽及点的垂线偏差达 ±5″ 的精度。

本文得到了许厚泽同志的指导,并引用了一些单位和个人的未出版的文献的结果,特在此致谢。

参 考 文 献

[1] 周江文: 误差理论,重力异常的推估,测绘出版社, 1979 年。

[2] 方俊: 重力测量与地球形状学,下册,科学出版社, 1975 年。

[3] 武汉测绘学院: 大地重力学,中国工业出版社, 1961 年。

[4] Tscherning C. C., Rapp, R. H., Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the vertical Implied by anomaly Degree-Variance models, Report of the Department of Goedetic Science, Report No. 208, The Ohio State University, Columbus, O., 1974.

ON THE LAYOUT OF THE MARINE GRAVIMETRIC LINES

Zhang Chijun Mao Huiqin Zhou Jingming
(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

Lately the marine gravity is developing on a large scale. It is worth to study how to set the measuring lines (points) of marine gravity for the purpose of gravimetric geodesy. In this paper the error of $1° \times 1°$ mean gravity anomaly and deflection of the vertical on a point are analysed by starting from the actual data and using the principle of least squares collocation. The error of interpolation of deflection of vertical is discussed by giving consideration to the second derivative of it with respect to distance. Generally, in the ocean, the accuracy of $1° \times 1°$ mean gravity anomaly and deflection on a point can reach ± 3 mgal and ± 5 arc second respectively.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

动力重力测量的发展及其前景*

李 锡 其

提　　要

扼要地介绍了动力重力测量的发展概况。讨论了海洋和航空重力测量中的各种扰动影响及其解决办法。提出了需进一步解决的问题。论述了用梯度仪进行动力重力测量的主要优点。简单介绍了国外正在研制的几种重力梯度仪的工作原理。用梯度仪来进行动力重力测量是很有前途的，因为它不仅能给出较高的精度，而且能为大地测量，地球物理和地球形状研究提供更多的有用信息。

一、绪　　言

大家知道，不论是研究地球形状及有关的大地测量问题，或是研究地壳构造，都需要知道全球的重力值。然而地球表面有 72% 的面积是海洋，所以海洋重力测量是近代重力学中一个十分重要的课题。自从 1923 年威尼-曼尼兹用摆仪在潜艇上成功地进行了第一次精密测量以来，海洋重力测量不论在理论上或在仪器制造方面，都有了极大的发展。

五十年代初，不少国家都研制了计划在潜艇上观测的静重力仪。由于这些仪器经受扰动加速度的能力相当好，所以很快就应用到海船上。但是当时的船用重力仪都是安放在常平架上工作，其观测结果必须引入布隆尼改正。这种改正同水平加速度的平方成正比，一般都达数十至数百毫伽。所以到了六十年代，几乎所有海洋重力仪都改用陀螺稳定平台了，这时仪器的灵敏轴与真垂线相一致，所以不再有布隆尼改正。1960 年，哈立逊在理论上提出了水平加速度和垂直加速度交叉耦合（Cross Coupling）效应问题，简称 C-C 效应。这是转动型重力仪安置在稳定平台上工作时产生的一种效应。然而它在数量上远比布隆尼效应小，而且较易消除，所以人们仍然乐于采用稳定平台来代替常平架。到了七十年代，为进一步提高精度，大部分现代海洋重力仪已发展成轴对称型仪器，以消除 C-C 效应。

目前，海洋重力仪的仪器精度已高于 1 毫伽，在平静的近海地区，甚至可高于 0.5 毫伽。可以这样说，现在影响海洋重力测量精度提高的主要原因不是重力仪误差，而是确定厄特弗斯改正的误差。可以预期，在有连续精确定位的近海地区，利用船上重力仪来进行石油或其它矿藏的勘探是完全可能的。

应用重力仪在海船上进行重力测量的成功，使人们联想到在空中进行测量的可能性。

* 1981 年 5 月收稿。

多年来，许多国家都进行了这方面的试验。然而尽管航空重力测量与海洋重力测量有很多相似之处，但它也有许多特殊的问题。例如在海洋重力测量中，除去海洋潮汐影响之外，船只基本上是在大地水准面上航行的，不存在高度变化问题，垂直加速度可以通过取观测平均值予以消除。但在航空重力测量中，航高是随着气流的影响不断变化的，垂直加速度同高度变化引起的重力变化叠加在一起，不能用简单的滤波方法予以滤除。此外，飞机上的厄特弗斯效应很大，不易准确测定。所以至今航空重力测量的精度仍不能大幅度地提高。不过据报道，美国用拉科斯特-隆贝克重力仪和测高仪等辅助设备组成的直升飞机重力测量系统已达到 1 毫伽左右的精度，系统的飞行时速为 60 英里。

由于航空重力测量在很大程度上受到厄特弗斯效应的限制，人们很自然的想到了重力梯度测量。大家知道，用扭秤进行的梯度测量在地球物理上曾起过重要的作用，只是由于观测费时，局部地形改正计算过于烦琐，才逐步被高精度重力仪所取代。但如把梯度测量应用到动力重力测量上，它却有着无可比拟的优点：首先，梯度测量对惯性加速度不敏感，基本上没有厄特弗斯效应。其次，在用作航空测量时，梯度仪对高度变化比较不敏感，仅为 0.004 厄特弗斯/米(厄特弗斯是梯度单位，1 厄特弗斯 $= 1 \times 10^{-9}$伽/厘米)，但重力仪达 0.3 毫伽/米。第三，运动着的地面梯度仪系统，与厄特弗斯扭秤不同，不必加局部地形改正，因为它对路程上的各点梯度都进行了测量，然后沿路程进行积分。第四，在地球物理解释中，利用重力向量或重力张量数据，其结果比单用重力异常标量好得多，而适当组合的梯度仪系统有可能测出重力向量或全部张量分量。约顿以路易斯安娜海湾沿岸的盐丘为例进行了比较[4]。图 1 是深度估算误差与测线间距的关系，图 2 是直径估算误差与

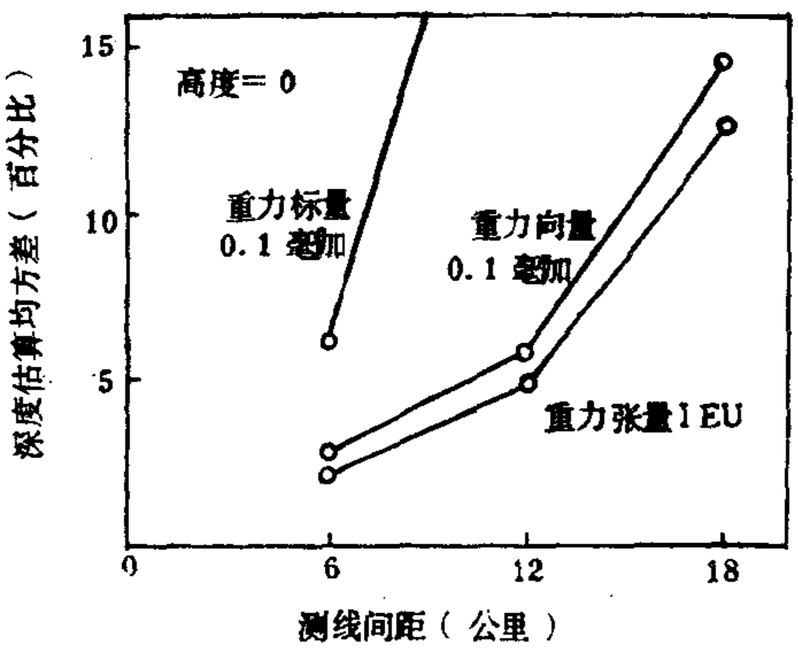


图 1

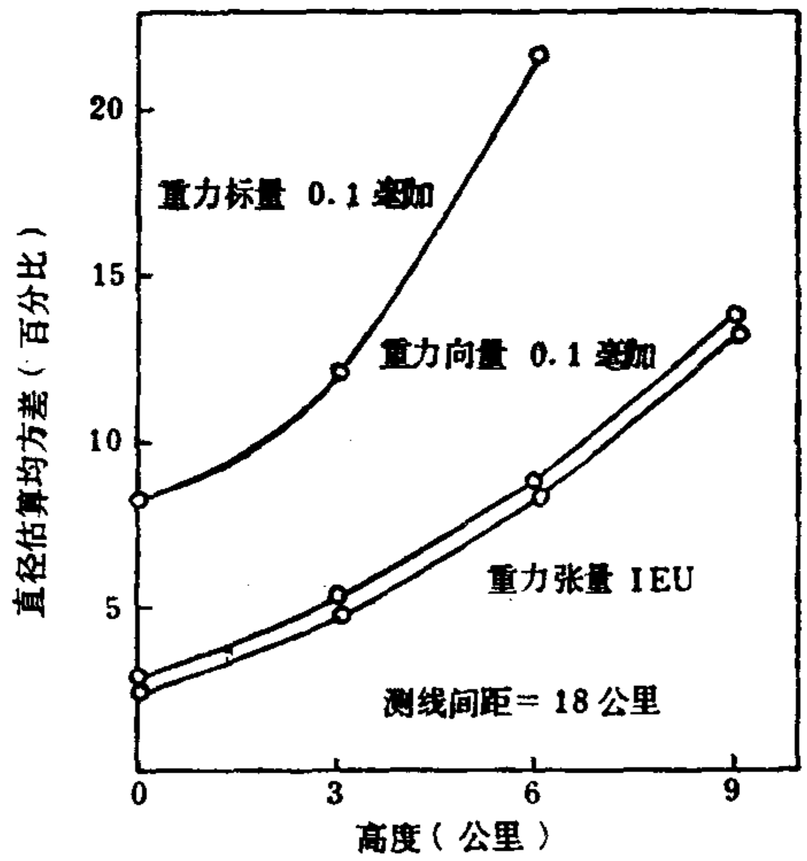


图 2

飞行高度的关系。由图上可以看到，用重力向量或张量进行解释，比用重力标量要准确得多。第五，利用卫星梯度测量，可在短期内 (20—30 天) 得到更详尽的全球重力图。目前现有的人卫观测资料只能给出波长较长的重力场变化，即低阶球谐函数，大约是 30 阶，但如利用达到一定精度的卫星梯度测量，则有可能推求到较高的阶，例如 75 阶[8]。

此外，梯度测量还能为惯性导航系统提供实时垂线偏差，提高导航精度，因为现代惯

性导航部件的精度已达到这样的水平，即进一步提高精度的限制不是来自于陀螺仪和加速度计的性能，而是来自于垂线偏差。

正是由于动力重力梯度测量有着上述种种优点，所以自六十年代末以来，受到各国的重视，特别是美国，已经投入大量人力和经费来进行这种研究。

二、动力重力测量中的一些共同问题及其解决方法

（1）厄特弗斯效应　我们知道，重力是地球引力与地球自转离心力的合力。而所谓动力重力测量是指在运动着的运载体上进行的重力测量，这种运载体包括轮船，飞机，车辆和卫星。因此当运载体向东运行时，就在地球自转的速度上叠加了载体的运动速度，使离心力变大，所测重力比实际重力小。如运载体向西运行，则情况与此相反，所测重力较实际为大。它们的关系是由厄特弗斯推导出来并实验证明的，故称为厄特弗斯效应。顾及飞行高度的计算公式为[3]：

$$\Delta g_E = (R_\varphi + h)(2V_\varphi V_e + V^2)/R_\varphi^2 \qquad (1)$$

式中，R_φ 为纬度 φ 处的地球半径，h 为运载体离海平面的高度，V_φ 为纬度 φ 处地球表面的切线速度，V_e 为载体运动速度的东向分量，$V_e = V\sin A$，A 为运动方向的方位角。

在海上测量时，h 为零，如船速不大于 10 节，包含 V^2 的项小于 0.5 毫伽，可忽略不计。这时改正值为 $\Delta g_E = 7.50V\cos\varphi\sin A$，$V$ 以节为单位，Δg_E 以毫伽为单位。若要求精度较高，则 V^2 项亦应考虑进去。

应当指出，上面公式中的航向 A 和航速 V 都是指船只对地面运动的方向和速度。由于海流的影响，船上罗经和电磁测程仪等不能正确给出这些数据，而必须用无线电定位或卫星导航、惯性导航等方法来确定。现有的卫星导航系统（Transit），依船只纬度的不同，两次定位之间的时间间隔在 1978 年为 35—100 分钟。在这段时间间隔中，船只只好依靠自身的罗经和测程仪进行内插，所以精度是不高的，加上多普勒声纳之后，精度有所提高，但在深水地区和盐度变化较大时，精度也受到限制，也许新的一代导航卫星（Nova）陆续上天之后，情况会不断改善。

（2）垂直加速度影响　由船只各种运动产生的扰动加速度，都可分解成水平和垂直加速度。垂直加速度是和重力加速度叠加在一起的，其幅度比我们要求的测量精度大几十万至几百万倍。幸而这种垂直加速度是短周期的，我们可以通过滤波的方法把它从长周期的重力变化中滤去。设取一段时间的观测平均值，我们有

$$\frac{1}{T}\int_0^T (g + \ddot{Z})dt = \bar{g} + \dot{Z}\Big|_0^T/T \qquad (2)$$

式中，$\bar{g}$ 为重力平均值，$\dot{Z}\big|_0^T$ 是观测期间垂直加速度的变化。因为 $\ddot{Z}$ 是波浪运动引起的随机量，只要取足够长时间的观测平均值，就可使 $\dot{Z}\big|_0^T/T$ 小于给定的误差范围。但垂直加速度的幅度远大于重力仪的测量范围，所以为保证仪器能够观测，一般都须在弹性系统中设置强阻尼，把短周期的垂直加速度压缩到仪器的测量范围之内。当然，也有一些仪器的测量范围很大，不用阻尼也能观测，如振弦重力仪等。不过阻尼还有一些其它的好处，阻尼愈大，为使 $\dot{Z}\big|_0^T/T$ 小于给定数值所需的观测时间愈短，C-C 效应也愈小，同时还可

消除垂直加速度的二次效应。一般说来，在重力测量仪器中，凡是所观测的量与重力或垂直加速度不成线性的仪器，如摆仪，单振弦重力仪，苏联的 ГАЛ 重力仪和我国的 HSZ-2 重力仪等，都存在有二次效应。但在后两种仪器中，由于有液体强阻尼，其影响被减小到可忽略不计。线性化的重力仪，如拉科斯特，GSS 和我国的 ZYZY 等，不存在二次项，但强阻尼压缩了摆的振幅，也有利于减小因机械结构和电传感器不够完善而产生的非线性误差。强阻尼也有缺点，我们将在下一节讨论。

在航空重力测量中，由于垂直加速度和航高变化同时出现，而且有些频率相当接近重力异常变化的频率，所以我们不能像海洋上那样只进行简单的滤波，而必须连续地测出航高变化，然后进行改正。

(3) 水平加速度影响　早期的摆仪测量，威尼-曼尼兹是用虚摆的原理来消除水平加速度的直接影响的，即用一对摆长相等的摆组成一个虚摆。现代重力仪则是施加机械约束，使质量只有一个垂直运动自由度，以及采用零长弹簧等方法来消除水平加速度的直接影响。但是，无论是哪一种仪器，只要是安置在常平架上工作，就存在有水平加速度二次效应。这个问题首先是英国的布隆尼在 1937 年指出的，所以二次项改正又称布隆尼改正。

从力学理论知道，一个物理摆，当其自振周期很长时 (84.4 分)，将不受运动加速度的影响，始终指向真垂线，而当其周期很短时，在水平加速度的作用下，将指向重力加速度和水平加速度合成的视垂线方向。安置重力仪的常平架，一般周期较短，所以在有水平加速度时，重力仪的灵敏轴将指向视垂线，观测得到的是重力加速度和水平加速度的合成加速度 G。如图 3 所示，0 为常平架的悬挂点，H 为水平加速度。若保留至二次项，其改正值为

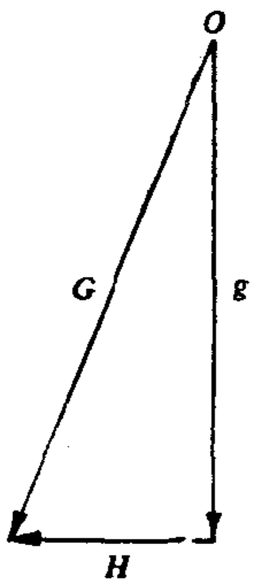


图 3

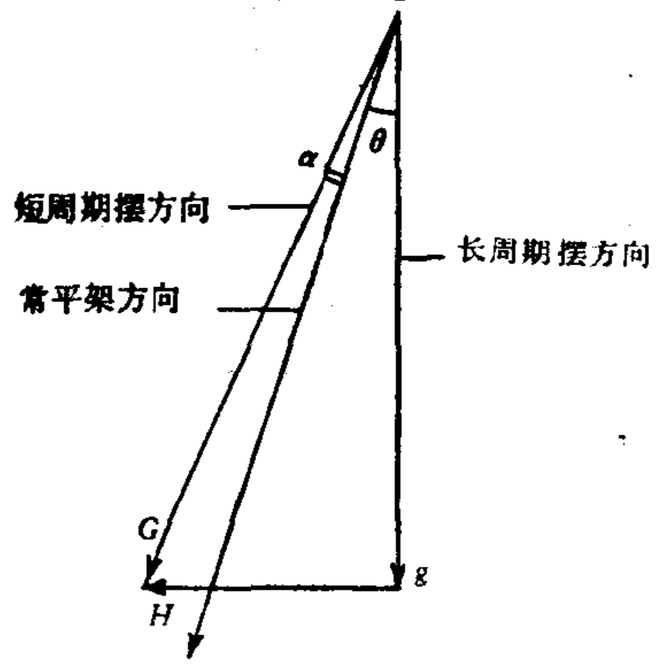


图 4

$$\Delta g_H = g - G = -\frac{H^2}{2g}$$

一般我们都把水平加速度分解成两个互相垂直的分量，即 $H^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2$，如以 $\ddot{x}_0$ 和 $\ddot{y}_0$ 分别代表这两个分量的幅度，并令 $\ddot{x} = \ddot{x}_0 \sin w_x t$，$\ddot{y} = \ddot{y}_0 \sin w_y t$，则上式可改写为

$$\Delta g_H = -\frac{\ddot{x}_0^2 + \ddot{y}_0^2}{4g} \tag{3}$$

这就是布隆尼改正公式。由公式看到，随着水平加速度的增大，改正值迅速增大，当 $\ddot{x}_0 = \ddot{y}_0 = 50$ 伽时，Δg_H 达 1250 毫伽，而且如要求精度较高，则高次项亦不可忽略。

在实际工作中，因常平架周期不够短，不完全指向视垂线，所以通常在 x，y 方向各安置一对长、短周期摆来确定这个改正值。如图 4 所示，长周期摆代表真垂线方向，短周期摆代表视垂线方向，记录下它们与常平架的夹角 θ 和 α，即可计算出实际改正值。

由于二次项改正很大，不易精确确定，所以到六十年代，常平架基本上都为陀螺稳定平台取代了。

现代陀螺稳定平台的精度已做得相当高，它与真垂线的偏角 β 一般不大于 1′—2′，由此产生的倾斜误差 $\delta g_\beta = -\frac{1}{2} g\beta^2$ 很小，可忽略不计。但水平加速度 H 在仪器灵敏轴上的分量不能忽略。由图 5 看到，H 在仪器灵敏轴上的分量为 $\delta g_H = H \sin\beta \doteq H\beta$，当 $H=$ 50 伽，$\beta = 1'$ 时，$\delta g_H = 14.5$ 毫伽。若 β 为常值，或其变化周期与 H 的周期不同，则取观测平均值可将其消去。但实际上 β 角有一部分是直接产生于 H 的，设其为 β'，这时 β' 与

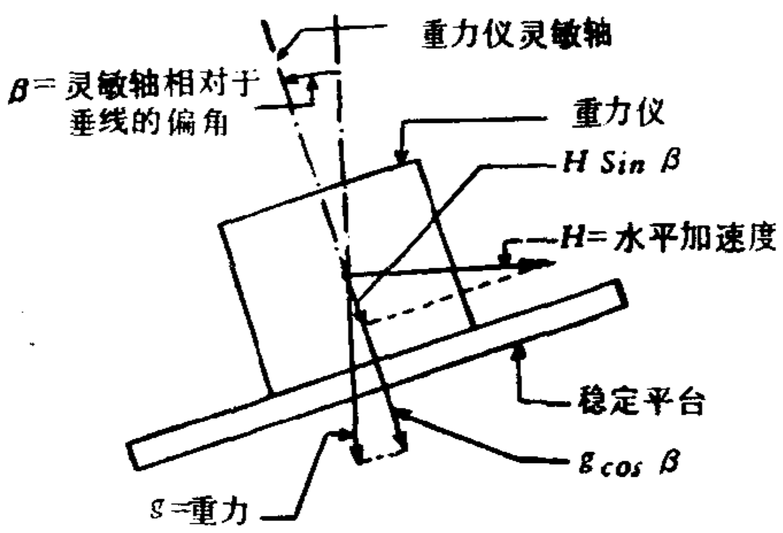


图 5

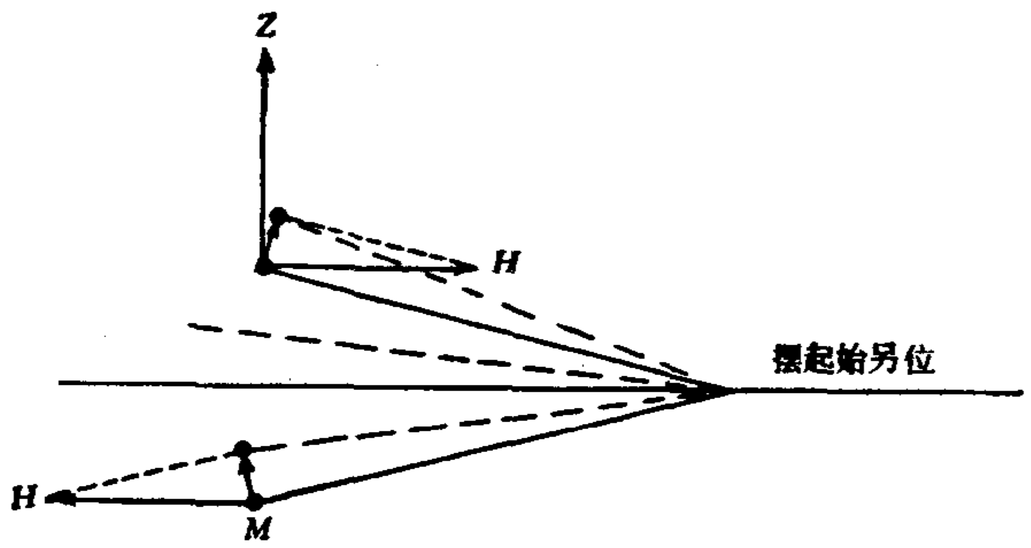


图 6

H 同周期，H 改变符号时，它也改变符号，所以取平均值不能把它消去。设

$$H = H_0 \sin\omega t,\quad \beta' = \beta'_0 \sin(\omega t + \delta)$$

代入 δg_H 式中，并取观测时间平均值，我们有

$$\delta g_H = \frac{1}{2} H_0 \beta'_0 \cos\delta \tag{4}$$

为消除这种影响，通常我们是要求设计平台时控制 β'_0 和 δ 的数值，使(4)式中的 δg_H 小于给定的误差范围。这是重力仪平台与其它用途平台的主要区别。

（4）C-C 效应。这是转动型重力仪安置在稳定平台上工作时由同周期的水平加速度和垂直加速度共同作用而产生的一种效应。在图 6 中，M 为重力仪摆锤，在垂直加速度 $\ddot{Z}$ 的作用下，摆对称于水平的起始位置上下振动，取观测平均值即可消除垂直加速度的影响。但当有水平加速度存在时，水平加速度的分力使摆向上偏离到一个新位置，如虚线所示，若水平加速度与垂直加速度同周期，则当垂直加速度变符号时，水平加速度也改变符号，于是摆始终向上偏离一个常值，取观测平均值不能消除，这就是 C-C 效应。设摆相对于水平位置的倾角为 $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$，这时水平加速度在垂直于摆杆方向上的分力为 $H\sin\varphi \doteq H\varphi$，这就是 C-C 效应产生的误差 δg_c。

设

$$H = H_0 \sin(\omega t + \delta),$$

δ 为H与φ的相位差，则

$$\delta g_c = H_0 \sin(\omega t + \delta) \times \varphi_0 \sin \omega t$$

取观测时间平均值，得

$$\delta g_c = \frac{1}{2} H_0 \varphi_0 \cos \delta \tag{5}$$

消除 C–C 效应的方法很多，例如把重力仪输出的φ角信号输入到平台的控制迴路，让平台倾斜一角度，保证重力仪摆杆始终处于水平位置，即 $\varphi = 0$；把H和φ的信号输入计算机，算出改正值然后再加到重力仪的输出上；把两台相同的仪器反向安置，取其观测平均值等等。但最理想的方法还是采用适当的仪器结构，使其根本不产生这种效应。所以自七十年代开始，几乎所有的海洋重力仪都逐步采用轴对称的弹性系统结构，从根本上消除 C–C 效应。

三、有待于进一步解决的问题

如上所述，五十年代以来，海洋重力测量的理论和仪器都有了极大的发展，特别是水平加速度影响的问题解决得比较好。利用轴对称的重力仪，安置在现代的陀螺稳定平台上，已能完全消除水平加速度的影响和 C–C 效应。但在解决垂直加速度影响方面，则还不够理想。虽然通过液体、空气或磁阻尼，再加上电子滤波器，可以把垂直加速度滤去，但这时也压缩了我们要测量的重力异常的幅度，并产生滞后现象。这不仅限制了测量精度的进一步提高，而且也限制了测量船只的航行速度，因为速度愈快，由阻尼引起的异常畸变愈大。例如西德的 GSS–2 重力仪，虽然加上伺服控制之后，幅度压缩和相位滞后有较大改善，但在重力异常变化较大的地区测量，仍有不可忽视的误差。厂方给出的滞后时间改正只适用于线性变化的异常。然而实际异常的变化是极其复杂的，特别是在地质构造复杂的地区，这时如只用厂方给出的滞后时间来改正，则测量结果必将与实际情况不符。

为了恢复重力异常的本来面貌，上述仪器的观测结果应当进行反滤波。反滤波的原

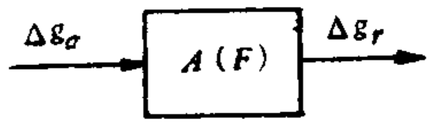


图 7

理如下，设 Δg_a 为实际的重力异常，是未知量，通过仪器的滤波器后被记录下来，成为仪器的读数 Δg_r，是已知量，这个过程可以写成图 7 的方框图。 反滤波就是要找出滤波器 $A(F)$ 的逆，$B(F)$，使图 8 所示的方框图成立。显然这时有 $A(F)B(F) = 1$，利用这

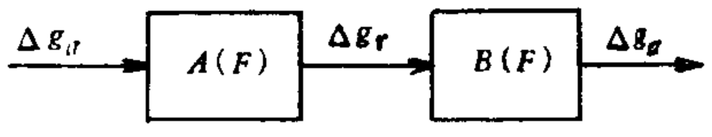


图 8

个恒等式即可根据 $A(F)$ 的参数求出 $B(F)$ 的参数来。1974 年加拿大的哈窝斯和朗卡里畏克曾对一台 GSS-2 重力仪的记录进行了反滤波处理[6]。图 9 画出了重力仪对不同

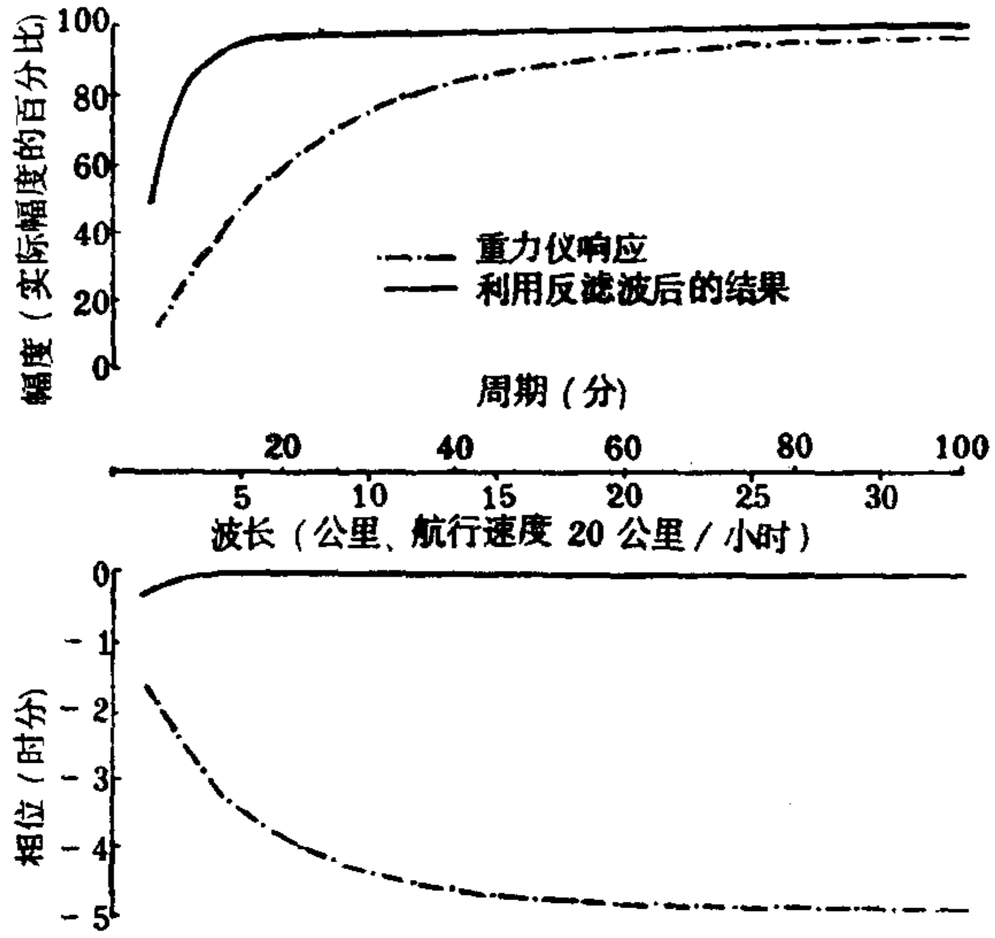


图 9

周期重力异常的响应以及反滤波处理后的结果。由图上可以看到，异常的畸变是颇大的，而且实际测量航速往往还超过 20 公里/小时，所以误差可能会更大。同时也可看到，反滤波的效果是显著的。

拉科斯特海空重力仪本身没有滞后现象，因为在描述其摆运动的二阶微分方程

$$B\ddot{\varphi} + D\dot{\varphi} + R\varphi + g + \ddot{Z} - s = 0$$

中，它不仅由于采用强阻尼可以像 GSS-2 及其它强阻尼重力仪一样，把摆运动的加速度项 $B\ddot{\varphi}$ 略去，而且由于采用助动弹性系统，仪器有很高的灵敏度，摆的位置项 $R\varphi$ 也可以略去，因而不必等到摆杆完全归零就能读数，这时仪器的基本方程为

$$g = s - D\dot{\varphi} + c \tag{6}$$

式中，g 为重力仪读数，s 为弹簧张力，D 为与阻尼有关的常数，$\dot{\varphi}$ 为摆的运动速度 $= d\varphi/dt$，c 为任何需要加上的改正项。

但在上述记录中，垂直加速度在 $D\dot{\varphi}$ 项中的干扰是尚未滤除的。为避免在滤波过程中出现滞后现象，它在四次滤波中采取两次向前推进两次向后推进的方法，所以实际上也应用了反滤波的原理。

随着电子技术和计算机技术的发展，现已可能做出响应迅速畸变较小的海洋和航空重力仪。一种可能的方案是采用快速伺服系统代替强阻尼，使质量基本上保持在零位置，然后在记录中采用数字滤波滤去垂直加速度的干扰。不过即使有快速响应的重力仪，航空重力测量中的航高测定依然是一个问题，采用对航高变化不敏感的梯度测量也许是解决问题的办法。

目前我国已进口了若干台 GSS-2 重力仪，在用这种仪器进行要求较高的测量或在地质构造复杂的地区进行作业时，应当采用反滤波来消除滞后和畸变的影响，不然所测数据

会有颇大的误差。

随着陀螺仪技术的发展，能在船只曲线航行时进行重力测量的日子已经不远了，这将大大提高劳动生产率和降低测量成本，特别是在沿海地区，过去那种由于避船而丢失数据的情况将可以避免。但是厄特弗斯效应在很大程度上限制着这种发展。因此，如何解决厄特弗斯效应问题，是动力重力测量进一步发展面临的一个重大问题。

四、用梯度测量方法进行动力重力测量

前面已经提到，用梯度仪进行动力重力测量有许多优点和各种用途。由于它基本上没有厄特弗斯效应，对高度变化不敏感，特别适合于航空重力测量；由于他能比重力仪提供更多的有用信息，对大地测量和地球物理的研究将有很大的促进。所以尽管至今这种仪器还处于试验阶段，全面利用梯度测量数据的方法还在探索之中，但它的发展前景是很吸引人的。

大家知道，重力位的二次导数或重力梯度可以用一个矩阵来表示：

$$\operatorname{grad} g = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix}$$

称为重力梯度张量。它的独立分量一共有六个，三个是重力梯度，包括两个水平梯度 W_{zx}，W_{zy} 和一个垂直梯度 W_{zz}，另外三个因与等位面的曲率有密切关系，故称为曲率值。

测量梯度的方法，基本上可以分为两类，一类是与厄特弗斯扭秤的原理相类似，测出引力场梯度对空间两个质量的扭矩，然后求出梯度，另一类是利用两个高灵敏度的重力仪以一定的距离固定安装，根据其读数差和距离计算出梯度。后一种方法容易理解，不再详述。现简单介绍一下扭秤的方法。

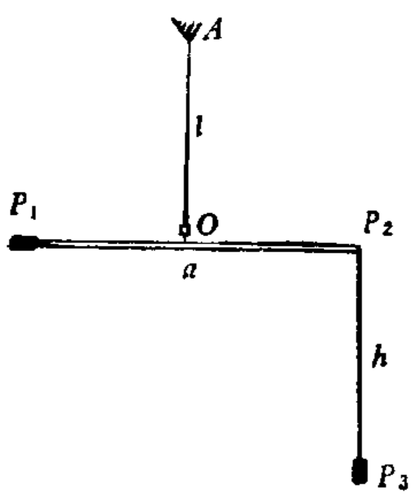


图 10

图 10 是厄特弗斯扭秤的原理图，AO 是一根长为 l 的扭丝，在其下吊着一根长为 a 的横杆，横杆左端有一重锤 P_1，右端的下方用一根长为 h 的细丝吊着一重锤 P_2。在横杆中央有一反光镜 O，用来观测横杆的偏转。如 P_1 和 P_2 处的引力不等，亦即存在有引力梯度，他将产生一扭矩，使横杆偏转，测出转角 ϕ 即可求出梯度。设取一坐标系，Z 轴与垂线重合，Y 轴与横杆相差（$90° - \alpha$）角，X 轴垂直于 Y、Z 轴，则

$$-T = I\left\{(W_{YY} - W_{XX})\frac{1}{2}\sin 2\alpha + W_{XY}\cos 2\alpha\right\}$$

$$+\frac{mha}{2}(W_{ZY}\cos\alpha - W_{ZX}\sin\alpha) = \tau\phi \qquad (7)$$

式中，T 为扭矩，I 为系统的转动惯量，m 为重锤的质量，τ 为扭丝的扭力系数。式中共有四个二次导数，加上仪器在起始位置的读数，即零位置，共有五个未知数，因此在一个测站上需将仪器安置在五个方向上读数，才能解出梯度值。如把重锤 P_2 移到横杆 P_2' 上，则

$h = 0$，仪器对重力的水平梯度不敏感，只测出曲率值。

现代梯度仪的基本原理与此相类似，但为提高精度及适合在运动着的运载体上进行测量，在具体结构上有很大的差别。这里简单介绍两种。

1. 旋转共振扭力梯度仪

如图 11 所示，它由两根互相正交的横杆 l 组成，每根横杆两端各有一重锤 m，两横杆之间用一扭轴相连。横杆安置在不同的坐标平面，则测量不同的梯度场张量分量，例如水平安置时，测出两个曲率值，安置在 YZ 或 XZ 平面，则测出重力的水平梯度。测量时整个系统以角频率 ω 绕扭轴旋转。设横杆在水平面上旋转，这时每一根横杆都相当于一个 $h = 0$ 的厄特弗斯扭秤，于是用 ωt 和 $90° + \omega t$ 代替(7)式的 α，可得

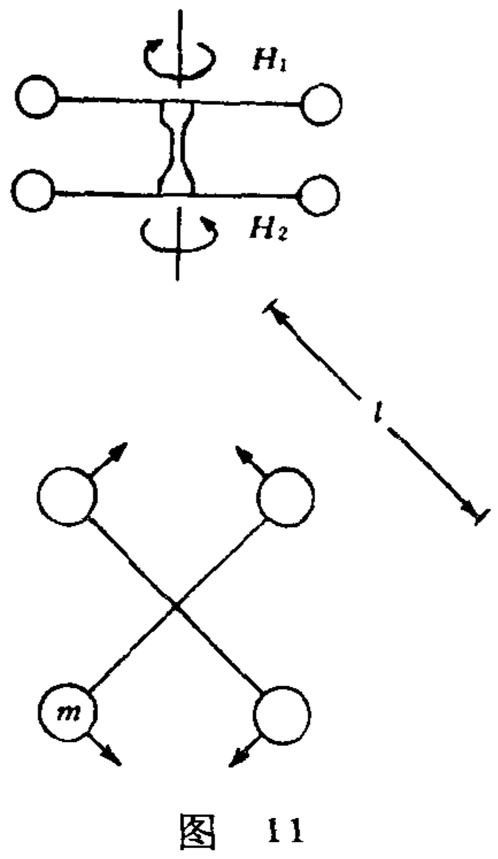


图 11

$$-T_1 = I\left\{-(W_{YY} - W_{XX})\frac{1}{2}\sin 2\omega t - W_{XY}\cos 2\omega t\right\}$$

$$-T_2 = I\left\{(W_{YY} - W_{XX})\frac{1}{2}\sin 2\omega t + W_{XY}\cos 2\omega t\right\}$$

相减，并以系统的转动惯量 $I = \frac{1}{2}ml^2$ 代入得

$$\Delta T = \frac{1}{2}ml^2\{(W_{YY} - W_{XX})\sin 2\omega t + 2W_{XY}\cos 2\omega t\} \tag{8}$$

由公式可以看到，当梯度仪以角频率 ω 旋转时，被测量的梯度受到角频率为 2ω 的调制，而其它干扰力则或受频率为 ω 的调制，或不受调制，所以我们可通过频谱分析方法把梯度同误差分离开。所测量的两个二次导数是以正交正弦信号的形式记录的，所以通过相位分析也可以把它们分离出来。

把梯度仪旋转的另一个极大的优点是，设计制造时，我们可把系统的共振频率设计为 2ω，通过机械共振把由梯度产生的微小扭角放大数十到数百倍，提高仪器灵敏度，然后再转换成电信号记录下来。

2. 浮子式重力梯度仪

这是一种把陀螺仪先进技术应用到梯度测量上的尝试。它是在一个圆柱形外壳里利用所谓浮力-粘滞-电容支承系统支承着一个圆柱形浮子，浮子的重心、浮心和几何中心要严格重合，浮子内部是两块重质量，相当于扭秤横杆上的两个重锤，不过这里不是靠扭丝吊着，而是靠液体浮着，所以有更高的灵敏度。重力梯度使两个质量产生一转矩，浮子即沿外壳转动一个角度。浮子与外壳间的相对运动由电容传感器敏感，然后用静电力施加一转矩，使浮子回到起始位置，所施加的力就是所测梯度的度量。质量分布可以有各种不同的形式，也可以多个质量。质量如何分布？它们在稳定平台上如何安置？安置多少个？则依要测量的梯度张量分量来决定。目前美国麻省坎布里奇 CSDL 研制的是球形结构，如图 12，在球形浮子上下各有一质量。这种结构测量重力的两个水平梯度 W_{ZX} 和 W_{ZY}。

设计的精度指标为 1/3 厄特弗斯。球形结构的优点是可放宽对平台角振动的要求。因为梯度仪也像其它动力重力测量仪器一样，必须安置在高精度的稳定平台上，水平精度15″，

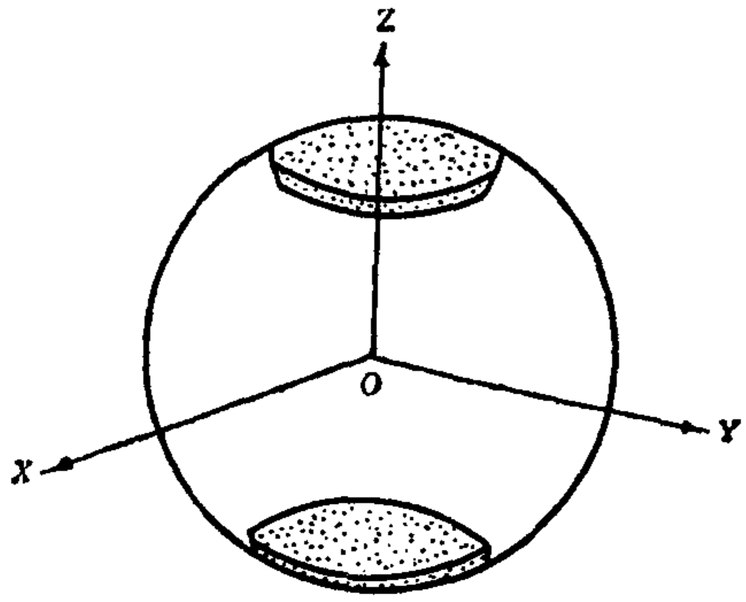


图 12

方位精度 0.2°，这两项按目前的技术水平是可以达到的。但圆柱形浮子要求平台的角振动小于 1″，这是比较困难的，采用球形结构，可将此项要求放宽至 1′。

除上述两种之外，还有一种微型静电加速度计（MESA）旋转梯度仪也正在研制之中。这是十多年来从理论概念研究到仪器设计思想探索和实验室试验，经历过大量研究和多种试验工作的考验而留下来的几种梯度仪设计。据估计，八十年代中期至少会有一种仪器可以投入使用。

运动梯度仪的研制成功，不仅会进一步推进动力重力测量的发展，而且在利用重力数据研究地球形状及有关大地测量问题和地球物理解释等理论工作方面，也将会引起深刻的变化，因为那时可用的数据已不单是重力异常标量了，而可能是重力向量或重力张量，如何充分发挥这些数据的作用，将是一个值得研究的问题。

参 考 文 献

[1] 方俊：重力测量与地球形状学，科学出版社，上册，1965年，下册，1975年。

[2] 张善言，李锡其：应用重力仪进行海洋重力测量，测绘学报，第6卷，第2期，1963年。

[3] Lacoste, Lucien J. B., Measurement of Gravity at Sea and in the Air. *Rev. of Geophysics*, **5**. 4. 1976, 477—526.

[4] Jordan, Stanley K., Moving-Base Gravity Gradioneter Survey and Interpretation. *Geophysics*, **43**. 1, 1978, 94—101.

[5] Trageser, Milton B. A., Gradiometer System for Gravity Anomaly Surveying, in Advances in Dynamic Gravimetry Edited by Wilbur T. Kattner, 1970, Texas.

[6] Haworth, R. T. and Loncarevic, B. D., Inverse Filter Applied to the Output of an Askania GSS-2 Sea Gravimeter, *Geophysics*, **39**, 6, 1974, 852—861.

[7] Bell, Curtis C., Forward, Robert L. and Willims, Harvell P., Simulated Terrain Mapping with the Rotating Gravity Gradioneter. in Advances in Dynamic Gravimetry Edited by Wilbur T. Kattner, 1970, Texas.

[8] Forward, Robert L., Review of Artificial Satellite Gravity Gradiometer Techniques for Geodesy, in the Use of Artificial Satellite for Geodesy and Geodynamics Edited by George Veis, 1974, Athens. Greece.

DEVELOPMENTS AND PROSPECTS OF DYNAMIC GRAVIMETRY

Li Xiqi

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

An outline of developments in dynamic gravimetry is given. Various disturbing effects in gravity measurement at sea and in the air and their solved methods are discussed. Problems needing to be further solved are presented. The major advantages using gravity gradiometer for dynamic gravimetry are expounded. Principles of operation of some gravity gradiometers which are under development abroad are introduced briefly. The dynamic gravimetry by means of gradiometer is promising, because it not only gives higher accuracy of measurement, but also provides theoretical researches on geodesy, geophysics and figure of the earth with more useful informations.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

鄂西山区天文水准和天文重力水准的测量工作

许厚泽　李瑞浩　骆鸣津　孙永庠
蒋福珍　傅兆珠　张赤军

摘　要

为了探索：①已施测天文重力水准的山区高程异常的计算方法；②尚未敷设和难于敷设天文重力点地区采用天文水准的可能性；③现有天文重力水准布点的合理性等一系列生产中迫切需要解决的问题。我们在鄂西山区建立一个面积约 14000 平方公里的试验场，场内由 11 个天文点和 280 个重力点组成了一个天文水准和天文重力水准闭合环。以三种内插方法按两种方案进行了内业计算，根据成果分析，对天文水准和天文重力水准工作提出了一些意见：

（1）高山地区可以用天文水准推求高程异常，天文点距为 15 公里左右，天文测定可按棱镜等高法进行；

（2）我国现有天文重力水准的布点基本合理。天文点周围特别是天文点联线附近的内环，重力点在平面和高程方面都要力求均匀分布，内环重力点最好增加一些，天文点上必须加测重力；

（3）山区天文重力水准计算时，以采用布格异常内插为宜，莫洛金斯基改正项不易算准，建议设法避免计算这项改正数。

一、前　言

为了用投影法处理天文大地网，必须求出似大地水准面到参考椭球面之间的距离，即高程异常，以便归算基线。过去国际上一般采用天文水准的方法，采用较精密的方法测定大量的天文点，因此在大山区推广这种做法是相当困难的。以后，莫洛金斯基提出了天文重力水准的方法[7]借以减少大量的天文测量工作。在我国这项工作已经取得了很大进展与成绩。但在山区由于地形复杂，给这项工作带来许多特殊困难。为了更深入地研讨有关问题，我们在鄂西山区建立了一个天文水准和天文重力水准的综合试验场。建立试验场的目的是为了探索下面三个目前生产中尚未完全解决的问题：

（1）山区天文重力水准的计算方法；

（2）山区运用天文水准的可能性和现实性；

（3）现有天文重力水准布点的合理性。

二、试验场的建立

1. 试验场布设的一般情况

根据建立试验场的目的和我们现有的条件，选择试验场时我们提出如下要求：

(1) 地形上比较有代表性的山区；

(2) 区内布设有国家天文重力水准路线；

(3) 有地形图和较多的大地资料；

(4) 有一定的交通条件。

根据这些资料，我们在鄂西山区选择了一块面积约 14000 平方公里的试验场，场内布设了 9 个三等天文点，253 个重力加密点，加上测区内原已施测的 2 个一等天文点和 30 余个重力点，构成了一个东西宽南北窄的闭合环；其平均边长为 17.7 公里，最短边为 10.1 公里，最长边为 23.4 公里。因为我国的大地水准面在东西方向有较显著的倾斜，所以闭合环在东西方向宽些是有好处的。新布设的天文点均在国家的一、二、三等三角点上。

虽然整个试验场都属山区，但闭合环的南北两线所通过的地区的地形还有很大差别。北线沿江，平均比高约为 300 米；南线设在大山区，平均比高约为 900 米。两线地形的差别还可以从天文点的高程上反映出来，北线天文点平均高程为 600 米，南线为 1500 米。在这样一个包含两种地形的地区内进行实验，对于校核不同类型的地形所得的结果是很有利的。

试验场重力点的布设，基本上是按照山区低精度天文重力水准线路的标准进行的。考虑到使用时有选择的余地，实际测量时又多测了一些点子。重力布点半径为 $2l$，共分三环。最内环点与天文点距离一般在 2 公里左右，中环点距天文点约 5 公里。外环点离天文点约 16 公里，即布置在 $2l$ 的极边处，以便保证有效的计算面积。全部天文点均施测了重力。

重力加密点在平面上的分布还是比较理想的；但就重力点的高程分布来说，则不很均匀。北线重力点多布于谷地，南线的重力点，特别是内环，则大多数都在高山顶上。这种状况在中外环有所改善，因为在这些地方用了相当数量的水准点和水位点。

2. 天文点的测定

天文点是按多星等高法进行观测的，主要仪器为威尔特 T_3 附加 60° 棱镜，时刻记录利用附有接触装置的恒时表一只及记时仪一架按目键法进行。前期观测我们使用了一只 0.5 秒接触的恒时表，后期改用 0.2 秒接触的小型恒时表(原威尔特 T_4 附件)，时号利用库克收录。

每年外业前后均在本所武昌时辰站上进行人差测定，每次进行 3—4 个晴夜，共测 6—8 组成果。每组观测严格控制在 2 小时内，观测星数在 12—20 颗之间，并均匀分布在各象限内。在野外，每个天文点共测两晚，北线的天文点均测 4 组（其中 k 点因天气十分恶劣，最后结果仅得三组)，南线天文点均测五组；因此南线天文点的实际精度比北线天文点稍高。各组观测，在野外按图解法进行计算。室内除使用图解法以资校核外，还按最小

二乘法进行平差得到结果。最后结果中已加入时号改正，人差的中误差 ±0.016 秒，各点经纬度的中误差一般为 ±0.04 秒、±0.5 秒。

按 60° 棱镜等高法同时测定一点的天文经纬度，用于测定三等以下的天文点是一个很理想的方法。它的实际精度在 ±1″ 左右。这一方法有以下几点优点：

（1）全套仪器配备较轻便，易于携带；

（2）T_3 加上棱镜可以同时测定纬度和经度，不加棱镜则可测定天文方位角。因此，野外天文作业的仪器装备比较简单；

（3）观测对仪器的整置要求不十分严格。经验证明，在观测过程中即使仪器稍有变化，即当气泡偏离中央 1—2.5 格时对成果也不会有明显的影响；

（4）观测时操作简便易于掌握。

这一方法的缺点是仅有一次重合读数，精度不高而最严重的缺点在于仪器受露水的影响很大。往往由于在棱镜上沾有露水而使星影亮度大为减弱，影响判别星影的重合时刻，使观测精度降低；在露水严重时可以使星影模糊得无法判认，而不得不被迫中断观测。因此利用这种仪器观测宜避开湿度过大、露水严重的季节。

为了不让水银面受风吹动，我们的经验是用硬纸板做一个防风斗，效果较好。利用这种防风斗，一方面可以减弱风的影响，同时还可以不用玻璃盖。因为玻璃盖的表面并不是很平的，两个面的平行程度也不很理想，因此不同方向来的星光在经过玻璃罩后产生不同的折射，从而破坏了等高条件，降低了观测精度。

3. 重力点的测定

由于山区交通不便，为了便于加密测量，在试验场内，我们利用逐级控制的办法建立了比较密集的重力控制网。控制网是以国家的四个二等点为基础，控制点的施测方式，是在二等点间用四架诺伽重力仪一次附合；或用两架重力仪三测线传递。控制点两点之间联测精度在 ±0.5 毫伽之内。

重力加密点的施测方法与通常采用的相同。在不能当日返回时，须扣去停留时间之静掉格。重力加密点相对于控制点的精度一般在 1 毫伽以内。重力点的高程和平面坐标用两种方法确定：（1）北线一般是由 1/1万 及 1/5 万地形图上量出。由于北线地形比较平坦，而且尽量把重力点选在明显的地物点或地形点上（如小路交叉处，村庄和垭口等），故精度一般尚好，高程可达 10 米左右，个别地区精度较差。（2）南线各点绝大部分乃实测所得，大多数是利用地形点和水位点，重力点设于水准点上时，平面位置由 1/5万 地形图确定，内环大部分点是用经纬仪施测的，高程用三角高程测定，平面位置用交会法测定，只有极个别点是在距离较近的情况下，以两架地形测高仪作为固定站，用两架空盒气压计进行气压测高，从我们在已知高程的点上进行比较的结果来看，其精度在 5 米之内。

总起来看，北线的高程多靠量图而得，精度稍差，而南线高程的精度则是完全有保证的。

三、天文水准成果的整理与分析

1. 基本公式

天文水准的基本公式为

$$\zeta_B - \zeta_A = -\int_A^B \vartheta ds - E$$

其中 $\zeta_B - \zeta_A$ 为 A，B 点的高程异常差，ϑ 为沿 AB 线上流动点的天文大地垂线偏差分量，E 为一小改正数，代表了水准面不平行的影响，实用上可略而不计，于是

$$\zeta_B - \zeta_A = -\int_A^B \vartheta ds \tag{1}$$

如果我们假设 A，B 两点间 ϑ 是直线变化的，则(1)式变为

$$\zeta_B - \zeta_A = -\frac{S}{2}(\vartheta_A + \vartheta_B) \tag{2}$$

S 为 AB 的距离。(2)式也就是在实际作业时所用的公式，因此，只要在两点上施测了天文经纬度并已知其大地坐标，便可求得其高程异常差。

天文水准的误差有下面几个来源：

(1) 天文观测误差。 如果天文经纬度测定的误差为 $m_{天}$，则其对高程异常差的影响将为

$$m_{\Delta\zeta天} = \frac{1}{\sqrt{2}} m_{天} S \tag{3}$$

(2) A，B 两点间 ϑ 非线性变化而引起的误差，用 m_ϑ 表示之，它是距离的函数，此外还与地形的复杂程度有关，由(2)式可得 m_ϑ 和 $m_{\Delta\zeta\vartheta}$ 之间的关系。

$$m_{\Delta\zeta\vartheta} = m_\vartheta S \tag{4}$$

(3) 大地坐标的误差，但它与前两者比较起来是一个很小的数值可略去不计。

综合(3)，(4)两式得

$$m_{\Delta\zeta} = \sqrt{\left(m_\vartheta^2 + \frac{1}{2} m_{天}^2\right) S^2} \tag{5}$$

如果天文水准向前推进 n 段，推至 $L = nS$ 的距离时，其积累的误差将为

$$m_\zeta = \sqrt{m_\vartheta^2 + \frac{1}{2} m_{天}^2}\ \sqrt{SL} \tag{6}$$

为了方便起见，取 S 及 L 以公里为单位，m_ϑ，$m_{天}$ 以秒为单位并令

$$\mu_\zeta = \frac{\sqrt{m_\vartheta^2 + \frac{1}{2} m_{天}^2}}{\rho''} \sqrt{S} \times 10^3$$

则(6)式可以写为

$$M_\zeta = \mu_\zeta \sqrt{L} \tag{7}$$

μ_ζ 称为每公里的中误差，单位为米/公里$^{\frac{1}{2}}$，他与天文水准的点距 S 和地形复杂程度有关。确定 μ_ζ 值是天文水准理论中的首要问题，现在还很难用解析式子来表示它，一般是从分

析天文水准成果中来求得它。包括用闭合差的方法，用差分法以及实测垂线偏差与内插垂线偏差相比较的方法。也可以从分析天文重力水准成果中重力改正项的数值的大小求得，如：

（1）陈永龄及叶冠玉从我国 $S \approx 100$ 公里的长边天文水准环，根据闭合差的大小求出估算单线推算差距的精度公式为

$$\begin{aligned} \text{平原} \quad & M_\zeta = \pm 0.040 \sqrt{L} \\ \text{一般山区} \quad & M_\zeta = \pm 0.060 \sqrt{L} \\ \text{高山地区} \quad & M_\zeta = \pm 0.110 \sqrt{L} \end{aligned}$$

（2）丘其宪根据我国 14 条一等锁环和 38 个精密导线三角形的高程异常闭合差所得的数值亦与上同；

（3）英国邦福特利用阿尔卑斯山 $S \approx 3.5$ 公里的密集的天文水准资料及印度的资料按差分法得[12]：

$$\begin{aligned} \text{平原} \quad & M_\zeta = 0.00052S \sqrt{L} \\ \text{山区} \quad & M_\zeta = 0.012 \sqrt{SL} \end{aligned}$$

邦福特认为山区的 μ_ζ 与 $\sqrt{S}$ 成比例，而平原的 μ_ζ 则与 S 成比例，这与实际情况比较接近，从上面的结果看出邦福特用短边天文水准和陈永龄用长边天文水准所得的结果基本上一致，因此我们选用二者的平均值作为天文水准的精度估算公式。

$$\left.\begin{aligned} \text{平原} \quad & M_\zeta = \pm 0.00045S \sqrt{L} \\ \text{丘陵} \quad & M_\zeta = \pm 0.0022S^{3/4} \sqrt{L} \\ \text{高山区} \quad & M_\zeta = \pm 0.0011 \sqrt{SL} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

2. 计算和分析

天文水准的计算按二步进行：

（1）垂线偏差的计算

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi - B - 0.171 \sin 2B \times H \\ \eta &= (\lambda - L)\cos B \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 φ，λ 为天文经纬度，B，L 为大地经纬度，H 为高程；

（2）天文水准的计算

$$\Delta\zeta = -\frac{S_{ij}}{2\rho''}\left[(\xi_i'' \cos\alpha_{ij} + \eta_i'' \sin\alpha_{ij}) + (\xi_j'' \cos\alpha_{ij} + \eta_j'' \sin\alpha_{ij})\right] \tag{10}$$

$$\text{闭合差} = \sum\Delta\zeta$$

其中 ξ_i，η_i 为天文大地垂线偏差分量，S_{ij} 为 i，j 点间的距离，α_{ij} 为 ij 的方位角。

计算结果列于表 1 及表 2，$\Delta\zeta_{ij}$ 是直接算出的，$\Delta\zeta_{ij}$ 为经闭合差分配后之结果。

从表 1 的数值可以看出，试验场各天文点的垂线都系统地偏向西北方向，因此这一地区的大地水准面是从东南向西北倾斜，这一点也可以从表 2 的数值反映出来。

把表 1 之值用图 1 来表示就可以更清楚地看出垂线偏差的变化情况，尤以子午圈方向为甚，其中 L 和 D 两点突变最大。如果把两端点 A 和 F 之间的垂线偏差视为直线变化时（如虚线所示），其误差是很大的。

表 1 垂线偏差成果

点号	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*J*	*K*	*L*
ξ''	2.08	1.56	1.74	7.81	3.90	3.75	2.96	3.25	0.19	3.83	14.41
η''	−6.88	−1.69	−6.40	−5.40	−1.75	−3.06	−5.00	−4.41	−6.67	−1.58	−2.07

表 2 天文水准成果

南 线

点 号	*A*—*B*	*B*—*C*	*C*—*D*	*D*—*E*	*E*—*F*	Σ
S(米)	19854	20325	21019	23257	13353	97908
$\Delta\xi$ (米)	−0.448	−0.408	−0.743	0.178	0.126	−1.295
$\Delta\xi'$(米)	−0.418	−0.379	−0.713	0.207	0.156	−1.147

北 线

点 号	*F*—*G*	*G*—*H*	*H*—*J*	*J*—*K*	*K*—*L*	*L*—*A*	Σ
S(米)	15306	10106	19728	18035	18471	15248	96894
$\Delta\xi$ (米)	0.389	0.257	0.553	0.197	−0.136	−0.289	0.971
$\Delta\xi'$(米)	0.418	0.289	0.582	0.227	−0.107	−0.260	1.147

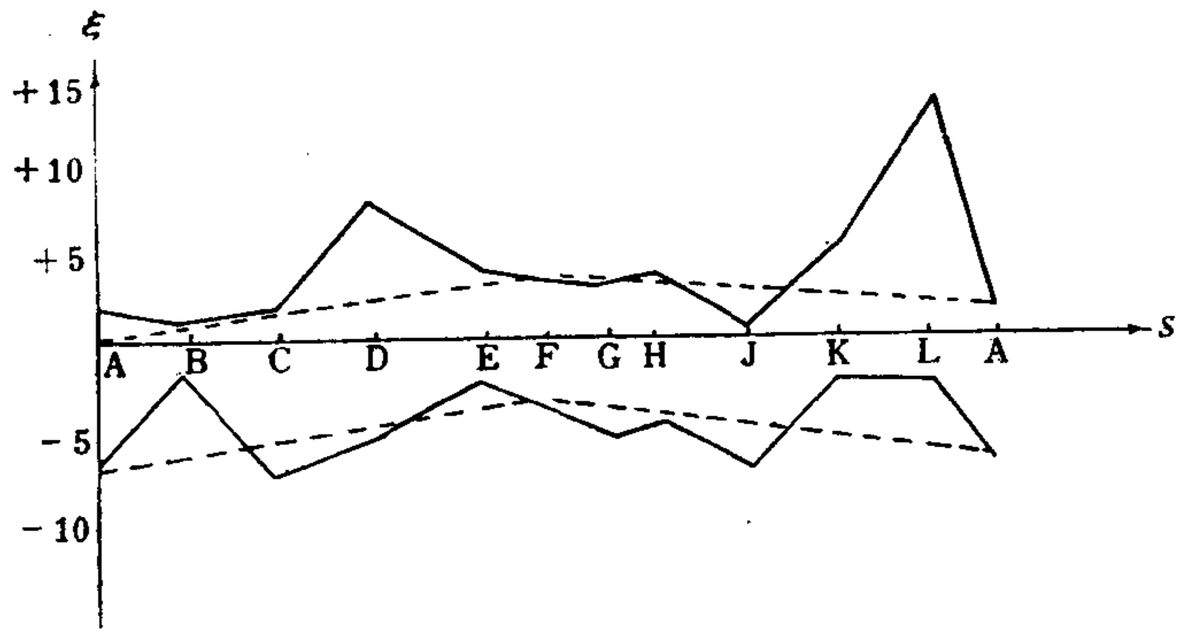


图 1 垂线偏差图解

试验场的天文水准精度可分析如下：

(1) 由闭合差 $w = 0.324$ 米，按全长 $L = 194.8$ 公里，$S_{均} = 17.7$ 公里，根据(6)式可得

$$\sqrt{m_{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_{天}^2} = \pm 1''.14$$

$$m_{天} = \pm 1''.0 \quad m_{\vartheta} = \pm 0''.9$$

(2) 以局部地形改正作间接内插所得的结果当标准结果，由比较 11 条短边天文水准结果根据(5)式亦可得 m_{ϑ}

$$\sqrt{m_{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_{天}^2} = \pm 1''.69$$

$$m_{\vartheta} = \pm 1''.53$$

(3)和(2)一样，以局部地形内插的结果为标准值，分别比较南北线的天文水准结果，根据(6)式可得下列结果（见表 3）：

表 3

线 段	$S_{均}$(公里)	L(公里)	$\Delta\xi$ (米)	m_{ξ} (米)	$\sqrt{m_{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_{天}^2}$	m_{ϑ} (秒)
南 线	19.6	97.9	1.295	0.585	2.74	2.65
北 线	16.2	96.9	0.971	0.261	1.36	1.16

从上面三种结果看来，以第一种用闭合差所得之值为最小，其原因是由于误差之偶然性，有可能抵消一部分。第二种结果表示整个地区内短边天文水准内插垂线偏差的精度，而第三种计算反映了天文水准求高程异常的实际精度，根据此值可得

$$\left.\begin{aligned} &\text{南线(大山区)} \quad M_{\xi} = \pm 0.013 \sqrt{SL} \\ &\text{北线(小山区)} \quad M_{\xi} = \pm 0.0027 S^{3/4} \sqrt{L} \end{aligned}\right\} \tag{11}'$$

这与(8)式基本一致，为了安全起见，我们认为可以(8)式为基础，而把它的系数加大 50％作为今后布设天文水准时的精度估算公式：

$$\left.\begin{aligned} &\text{平原} \quad M_{\xi} = 0.00068 S \sqrt{L} \\ &\text{丘陵(或小山区)} \quad M_{\xi} = 0.0033 S^{3/4} \sqrt{L} \\ &\text{大山区} \quad M_{\xi} = 0.016 \sqrt{SL} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

从上面列表可以看出南线所得的 m_{ϑ} 比北线的要大得多，所以说南线的精度比北线的精度要差，原因主要是南线地形比北线复杂。这说明天文水准敷设于较平坦的地区时，其精度比地形复杂地区大大提高。 因此布设天文水准时应该认真考虑有利的地形条件，条件许可时应尽量使天文水准线路沿开阔地区推进。

现在把南北线的天文水准精度和低精度天文重力水准精度作个比较，(11)′式中顾及天文影响 $m_{天}$，并以南北线相应之 S 值 19.6 公里和 16.2 公里代入则得

$$\text{南线(大山区)} \quad M_{\xi} = \pm 0.058 \sqrt{L}$$

$$\text{北线(小山区)} \quad M_{\xi} = \pm 0.026 \sqrt{L}$$

这与低精度天文重力水准精度估算公式

$$S = 82 \text{ 公里} \quad M_{\xi} = \pm 0.057 \sqrt{L}$$

是一致的。这说明山区 15 公里左右的天文水准是可以达到 80 公里左右的低精度天文重力水准的精度。

四、天文重力水准成果的整理与分析

1. 概述

山区天文重力水准的基本公式为

$$\zeta_B - \zeta_A = -(\vartheta_B + \vartheta_A)l + \int_\sigma (\Delta g + \delta g)L_0 d\sigma - \frac{l}{r}\left[\Delta g_A \frac{\partial H_A}{\partial l} + \Delta g_B \frac{\partial H_B}{\partial l}\right] \tag{12}$$

其中

$$L_0 = \frac{1}{2\pi\gamma}\left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - l\left(\frac{\cos\beta}{r'^2} + \frac{\cos\alpha}{r^2}\right)\right] \tag{13}$$

$$\delta g = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{H - H_0}{r_0^3}\Delta g d\sigma \tag{14}$$

这个公式是根据莫洛金斯基的小参数法导出的（见[7],[23]），其中 l 为天文点距之半，即 $l = \frac{S}{2}$，r',r,β, α 含义均见图 2。H, H_0 分别为流动点和待算点高程，r_0 为其平面距离，Δg 为流动点重力异常，$\frac{\partial H}{\partial l}$ 为沿 l 方向的高程梯度。

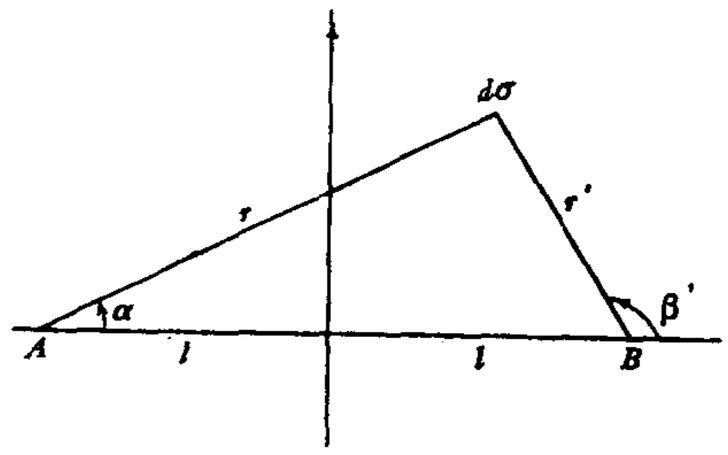


图 2

实际计算中采用模板进行数值积分，并把计算分成如下三大部分：

$$\zeta_B - \zeta_A = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

I. 天文水准项：

$$\mathrm{I} = -(\vartheta_B + \vartheta_A)l$$

II. 重力改正项：

$$\mathrm{II} = \frac{2l}{\rho''}\left(\sum_{\sigma=1}^{n} A_\sigma \Delta g_\sigma\right)$$

III. 重力改正加精项：

$$\mathrm{III} = \frac{2l}{\rho''}\sum_{\sigma=1}^{n} A_\sigma \delta g_\sigma - \frac{l}{\gamma}\left[\Delta g_A \frac{\partial H_A}{\partial l} + \Delta g_B \frac{\partial H_B}{\partial l}\right]$$

式中 A_σ 为模板系数。

山区天文重力水准的特点主要是重力异常的内插和莫洛金斯基重力加精项的计算问题，对于这些问题有过不少的具体的研究，通过这些研究取得了一些经验，但离完全解决生产实践中的问题尚有一段不小的距离，我们希望通过建立试验场取得一套比较完整的地球上的实际资料，以期对上述问题求得一些答案。

2. 整理计算的内容

(1) 短边天文重力水准环，每条边均用三种内插方法计算重力改正项：

(a) 直接利用空间异常；

(b) 用布格异常进行间接内插；

(c) 用局部地形改正后的异常进行间接内插。

每种内插又按二种方案(即顾及 δg 和略去 δg) 进行计算。因此每条边都有 7 个结果 (6 个天文重力水准成果和 1 个天文水准成果)可供分析比较。

(2) 长边 (A—F) 天文重力水准，A—F 的高程异常除了可由短边成果来递推以外，还由下列二种资料直接计算。

(a) 利用原山区布点方案所测资料进行计算；

(b) 利用试验场全部资料计算。

长边计算中还采用了点高程内插的方法，这样长边总共有 12 个结果 (见表 9)。

3. 计算方法和步骤

(1) 计算模板的选择：为了减少山区内插误差的影响，我们采用了极坐标系统模板 (见[24])，这个模板有下列优点：

(a) 采用平均异常的原则，这比采用点异常为佳，尤其对于异常变化剧烈的情况，用平均读数是有利的；

(b) 中央区域的异常用二次多项式来表示，提高了中央区域的计算精度。

(2) 按空间异常计算，计算公式是

$$\Delta\zeta_g = \frac{2l}{\rho''}\Sigma A_\sigma \Delta g_\sigma \tag{15}$$

式中 A_σ 为系数，Δg_σ 是一个扇环形内的异常均体值，短边的内环在 1/5万 的异常图上计算，外环在 1/20 万异常图上计算。长边的内环在 1/20万 异常图上计算，外环在 1/100万 异常图上计算，所得结果列于表 5 和表 7 中。

我们这次对异常读数规定为：内环 0.5—1.0 毫伽；外环 1.0—5.0 毫伽，在我们试验场的情况下保证了异常读数误差对高程异常的影响小于 0.01 米。

(3) 重力异常的间接内插，间接内插主要有四种方法：①利用布格异常；②利用局部地形改正后的异常；③直接顾及地形的方法；④利用点高程进行间接内插，其中②和③两法效果相仿。我们的目的也不是在于推广这些复杂的内插方法，而只是为了建立标准结果以便校核其他方法，所以这次计算中第③法没有采用，现将①，②，④三种方法分述如下：

(a) 用布格异常进行间接内插　从已知的空间异常值计算出相应的布格异常值，

绘制布格异常图，再连同地形图一起恢复成空间异常图，用公式表示为

$$\Delta g = \Delta g_{布} + 2\pi f\delta H \tag{16}$$

取 $2\pi f\delta = 0.1118$，则有

$$\Delta\zeta_g = \frac{2l}{\rho''}[\Sigma A_\sigma \Delta g_{布} + 0.1118\Sigma A_\sigma H_\sigma] \tag{17}$$

这种方法要套二次模板，计算时除了异常图以外还须要地形图，这个方法的优点是计算简便，又能在很大程度上消除局部地形的影响。

计算前做了如下的准备工作：

绘制与空间异常图相应的一套布格异常图；

准备 1/5 万地形图，供内环恢复空间异常之用；

根据 1/5万 地形图，利用平均高的办法编制 1/20万 的平展地形图，供长边内环和短边内环之用；

根据 1/100万 地形图编制 1/100万 平展地形图，供长边外环之用。

对这些地形图作如下分析：

1/5万 地形图，是航测所得。等高距有 10 米、20 米二种。估读平均高的误差在 30 米左右，即 3 毫伽左右的误差；

1/20万 平展地形图，估读平均高之误差在 50 米左右，即 5 毫伽左右的误差；

1/100万 平展地形图，估读平均高之误差在 300 米左右，即有 30 毫伽左右的误差。

记录计算均与空间异常部分相同，只须把 $\Delta g_{布}$ 及 $0.1118H$ 分别代替 Δg 的位置，最后成果按(17)计算，列于表 5 和表 7 中。

(b) 用局部地形改正后的异常 $\Delta g_{局}$ 进行间接内插　这种内插方法比布格异常的方法更精密些，因为 $\Delta g_{局}$ 中不但进行了层间改正，而且还顾及了重力点周围不规则地形的影响，$\Delta g_{局}$ 的计算公式为

$$\Delta g_{局} = \Delta g_{空} - 2\pi f\delta H - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta g_{地}$$

式中 $\Delta_1 = -\frac{\pi f\delta H^2}{a}$ 为计算平面引力时，计算半径 a 以外的影响；Δ_2 为地球曲率改正；$\Delta g_{地}$ 为局部地形改正；$2\pi f\delta H$ 即布格改正。

当 $H = 1$ 公里，$a = 100$ 公里时，$\Delta_1 = -0.56$ 毫伽，所以它是一个很小的数值，远远小于重力的内插误差，Δ_2 也很小，所以两者均可略而不计。这时公式简化为：

$$\Delta g_{局} = \Delta g_{空} - 2\pi f\delta H + \Delta g_{地} \tag{18}'$$

即

$$\Delta g_{局} = \Delta g_{布} + \Delta g_{地} \tag{18}$$

$\Delta g_{局}$ 就是根据(18)式计算的，算好以后可编制 $\Delta g_{局}$ 图，并根据(18)′式恢复空间异常，这时 $\Delta\zeta_g$ 可按下式计算

$$\Delta\zeta_g = \frac{2l}{\rho''}[\Sigma A_\sigma \Delta g_{局} + 0.1118\Sigma A_\sigma H - \Sigma A_\sigma \Delta g_{地}] \tag{19}$$

所以采用这种内插方法时要编制三种图：$\Delta g_{地}$，$\Delta g_{局}$ 和 H 图，相应地要套三次模板。

从(18)式可以看出，计算 $\Delta g_{局}$ 以前必须先计算 $\Delta g_{地}$ 和 $\Delta g_{布}$，然后按(18)′式恢复空间异常，但 $\Delta g_{布}$ 前面已经算出，现在就来讨论一下 $\Delta g_{地}$ 的计算问题。

我们共计算 292 点的 $\Delta g_{地}$，其中有 249 点是重力点，其余 43 点是另选的地形特征点，计算 $\Delta g_{地}$ 时，步骤如下：

选点　　除了全部重力点上计算 $\Delta g_{地}$ 以外，还要增选若干地形特征点以期 $\Delta g_{地}$ 能尽量反映地形的概貌，选点时仍然要注意内环的精度，所以天文点附近多选一些点子。

套模板　　为了进行校核，我们这次计算时用海福特模板和我所设计的圆模板同时进行计算。后者的主要优点是在同样计算半径（100 公里）内其误差与前者相差不大于 ±1.0 毫伽的情况下，大大减少了方块数，从而大大减少了计算工作。圆模板分环表见表 4。

表 4　圆模板环带半径

环　　号	内 半 径	外 半 径	扇 形 数
I	0.59 公里	1.28 公里	8
II	1.28 公里	2.29 公里	10
III	2.29 公里	5.00 公里	10
IV	5.00 公里	10.00 公里	10
V	10.00 公里	20.00 公里	10
VI	20.00 公里	50.00 公里	10
VII	50.00 公里	100.00 公里	10

从两种模板所得的结果看来，98% 的点子其结果相差在 1 毫伽以内，只有 2% 的点子（多属比高较大的点）相差在 1.5 毫伽左右。这说明了简化的圆模板是可靠的，顺便说明一下，原来海福特模板须计算到 166.6 公里即 O 环，我们只使用到 N 环即 99 公里为止，这样做的目的是为了和简化的圆模板的计算区域相适应。

读取平均高　　内环（圆模板的 I，II 环及海福特模板的 E，F，G 环）在 1/5万 地形图上读取，中环（圆模板的 III，IV 环和海福特模板的 H，I，J 环）在 1/20万 平展地形图上读取，外环（圆模板的 V，VI，VII 环和海福特模板的 K，L，M，N 环）在 1/100万 平展地形图上读取，读数精度如前所述，分别为 30 米，50 米和 300 米左右，比我们在[25]中所假定的 δ_h 值为小，所以精度是可靠的。

$\Delta g_{地}$ 的计算公式为

$$\Delta g_{地} = \frac{2\pi f\delta}{n} \Sigma \left(\sqrt{r_i^2 + h^2} - \sqrt{r_{i+1}^2 + h^2} + r_{i+1} - r_i\right) \tag{20}$$

式中 r_i、r_{i+1} 分别为环带内外半径，$h = H - H_0$，而 H 为扇环形平均高，H_0 为计算点之高程，n 为扇形数目、$2\pi f\delta = 0.1118$ 毫伽/米。此外在简化模板的 VI，VII 两环和海福特模板的 M，N 两环，我们还顾及了地球曲率的影响，公式如下：

$$h_0 = \frac{(r_{i+1} + r_i)^2}{8R}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{当 } H - H_0 > 0 \text{ 时} \quad \Delta g_{地} &= \frac{2\pi\delta f}{n}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right)\left[(H - H_0 - h_0)^2 - h_0^2\right] \\ H - H_0' < 0 \text{ 时} \quad \Delta g_{地} &= \frac{2\pi\delta f}{n}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right)\left[(H - H_0 + h_0)^2 - h_0^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中 R 为地球平均半径，h_0 为球面上的环带离 H_0 的水平面的距离。

中央环带(0.59 公里以内)的计算,是假定其高程为抛物线型变化,即 $h = kr^2$,系数 k 由第 I 环 (即海福特的 E 环) 的 8 个扇环形的高程求出,可以推出,(见[8])。

$$\Delta g_{地(中央)} = 2\pi f \delta l \sum_{1}^{8} \left[1 - \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}}\right]$$

式中 d 为 I (或 E) 环之重心位置,取 $d = 952.54$ 米 [8], l 为 I (或 E)环之内半径, $l=$ 590 米,计算时有专用表可供查用。从(21)式可以看出, 专用表的引数是 $H - H_{00}$ 以此为引数从用表中查出其他各扇环形的影响,最后累加求得 $\Delta g_{地}$。

根据所得各点之 $\Delta g_{地}$ 值,按(18)式算出相应各点之 $\Delta g_{局}$ 然后编制 1/5 万和 1/20 万的 $\Delta g_{地}$ 与 $\Delta g_{局}$ 图,再根据(19)式就可以计算出最后结果,此结果列于表 5 和表 7 中。

(c) 点高程的间接内插　　这种方法实质上就是布格间接内插、其差别只是方式不同而已,前者须用地形图,后者则只采用某些能反映地形概貌的高程点(如选取三角点、水准点、地形点等)。这时所采用的公式也是布格内插的一套

$$\left.\begin{aligned} \Delta g &= \Delta g_{布} + 2\pi f \delta H \\ \Delta \zeta_g &= \frac{2l}{\rho''} \Sigma A_\sigma \Delta g \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

工作步骤是: 先绘出布格异常图,然后把已知高程的点子按其坐标展人布格图上,在布格图上内插出这些点子的布格异常,再根据其高程恢复成空间异常,用这些间接内插出来的空间异常和实测点的空间异常值一起绘成空间异常图, 这样就完成了整个间接内插的过程。然后再在这种异常图上套模板即可求出结果。

我们这次在长边 A—F 两点间进行了这种计算,内插时用两种方案进行选点,第一种方案的点子多选在高山上,第二种方案的点子则既有高山又有谷地,垂直方面的布置比较均匀,从结果中看来第二方案的成果比第一方案有显著改善,其主要原因就是这个方案的点子在高程位置上的分布比较好。所以采用这种内插方法时一定要注意内插点在平面上和高程位置上都力求合理分布,以便能正确地反映地形概貌。

计算结果列于表 9 中。

(4) δg 的计算　　这项改正数的计数公式前面已经有了,即

$$\delta g = \frac{1}{2\pi} \int \frac{H - H_0}{r_0^3} \Delta g d\sigma$$

具体计算时仍然采用前述的简化圆模板进行数值积分,这时计算公式变为

$$\left.\begin{aligned} \delta g &= \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{VII}} K[(H - H_0)\Delta g]_{均} = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{VII}} K \times \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (H - H_0)\Delta g \\ K &= \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

K 为环带系数, n 为环带内扇形数。

至于第 I 环以内(即 590 米以内)的影响,则用另外方法计算,这时把 $(H - H_0)\Delta g$ 展成一个二次多项式:

$$(H - H_0)\Delta g = A r_0 \cos\alpha + B r_0 \sin\alpha + C r_0^2 \cos 2\alpha + D r_0^2 + E r_0^2 \sin 2\alpha \qquad (24)$$

代入(14)式得

$$\delta g_{内} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{r_1}\int_0^{2\pi}(A\cos\alpha + B\sin\alpha + Cr_0\cos 2\alpha + Dr_0 + Er_0\sin 2\alpha)d\alpha\frac{dr_0}{r_0} = Dr_1$$

这时 $r_1 = 590$ 米，为了求出系数 D，假设在 r 的圆上取 n 个点的 $(H - H_0)\Delta g$ 值，根据(24)式组成误差方程式，解之可得

$$D = \frac{1}{nr^2}\sum_1^n (H - H_0)\Delta g$$

当然还可以增加一个圆 $\left(\text{例如在}\frac{r}{2}\text{处}\right)$，组成 $2n$ 个误差方程式求解 D，但这样做工作量增加很大，而对精度提高帮助又不很大，所以只取单圆，且取在最外边，即用第 I 环已取出之 $(H - H_0)\Delta g$ 值来计算 D 值。

$$D = \frac{1}{8d^2}\sum_1^8 [(H - H_0)\Delta g]_{I环}$$

$d = 952.54$ 米为第 I 球之重心位置，于是

$$\delta g_{内} = \frac{r_1}{8d^2}\sum_1^8 [(H - H_0)\Delta g]_{I环} \tag{25}$$

把(23)、(25)二式合并，则得最后的工作公式

$$\left.\begin{aligned} &\delta g = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{VII}} K'[\Sigma(H - H_0)\Delta g] \\ &\text{其中第 I 环} \quad K' = \frac{r}{8d^2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ &\text{第 II–VII} \quad K' = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right) i = 2, 3, \cdots 7 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

计算所得系数 K' 列于表 5。

表 5 K' 值(以 10^{-6}/米为单位)

环号	I	II	III	IV	V	VI	VII
K'	195.4	34.4	23.7	10.0	5.0	3.0	1.0

这样就把内外环的计算全部统一在(26)式进行，从式中可以看出计算时要使用地形图和空间异常图，而 $H - H_0$ 值我们在计算局部地形改正 $\Delta g_{地}$ 时已经算出，所以这道工序不必重复，应该注意的是读取 Δg 时模板的放置和起读方向应与读 $H - H_0$ 时一致。

地形梯度项的计算　　这项计算公式是简单的，即 $\frac{\partial H}{\partial l}$，但由于地形复杂，加之 dl 可以任意选择，所以实际计算时，这项并不容易算好。我们在这次工作中采用了两种计算方案，现在分述如下：

① 把天文点附近的高程 H 当作 l 的直线函数，计算时直接在天文点附近的 l 方向上取距离为 $\pm\delta$ 处的 H_1 和 H_2，得

$$\left.\frac{\partial H}{\partial l}\right|_A = \frac{H_1 - H_2}{2\delta} \tag{27}$$

如图 3(*a*) 所示，对个别地形比较复杂，而地形图精度又较差的地方就采用取积分平均值的方法即

$$\left.\frac{\partial H}{\partial l}\right|_A = \frac{1}{2r_0}\int_{-r_0}^{+r_0}\frac{\partial H}{\partial l}\,dl$$



(*a*) (*b*)

图 3

应用高斯数值积分方法，取 $n = 10$ 则得

$$\left.\frac{\partial H}{\partial l}\right|_0 = \frac{H_1 - H_{-1}}{r_0} + 0.310\frac{H_2 - H_{-2}}{r_0} + 0.161\frac{H_3 - H_{-3}}{r_0} + 0.086\frac{H_4 - H_{-4}}{r_0} + 0.034\frac{H_5 - H_{-5}}{r_0} \tag{28}$$

其中 H_i 为下列坐标之高程值。(见图 3(*b*))

$$\left.\begin{aligned} H_1, H_{-1} \quad & x = \pm 0.149 r_0 \\ H_2, H_{-2} \quad & x = \pm 0.433 r_0 \\ H_3, H_{-3} \quad & x = \pm 0.679 r_0 \\ H_4, H_{-4} \quad & x = \pm 0.865 r_0 \\ H_5, H_{-5} \quad & x = \pm 0.974 r_0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

δ 取 100—200 米。r_0 取 500 米，H 从 1/5万 地形图上读出。

② 把天文点附近高程用抛物线来表示，即

$$H = H_0 + Ar\cos\alpha + Br\sin\alpha + Cr^2\cos 2\alpha + Dr^2 + Er^2\sin 2\alpha$$

α 从 l 的正方向起算，这时有

$$\left.\frac{\partial H}{\partial l}\right|_0 = A$$

为了求 A，在 $r = r_0$ 的圆周上均匀取 8 个点，如图 4 读出其高程，组成误差方程式，解之则得

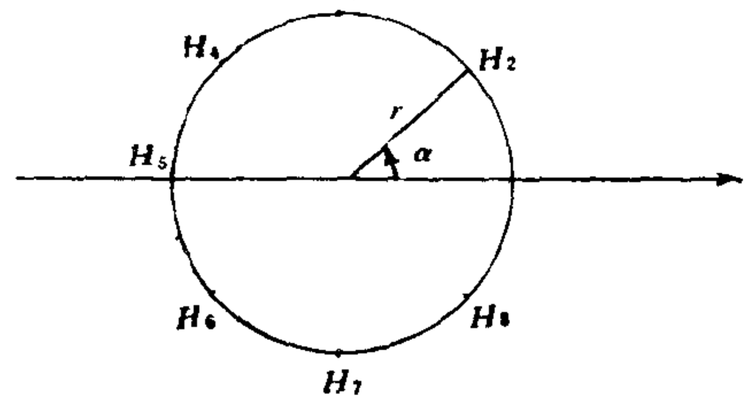


图 4

$$\left.\frac{\partial H}{\partial l}\right|_0 = A = \frac{1}{4r_0}\left[H_1 - H_5 + \frac{1}{\sqrt{2}}(H_2 + H_8 - H_4 - H_6)\right] \tag{30}$$

r_0 取为 250 米，H 亦从 1/5万 地形图上读出。

上面二种方法所得之 $\frac{\partial H}{\partial l}$ 值差别很大，即使应用同一方法而取不同之 δ 和 r_0 时，其结果仍有颇大差别。所以说 $\frac{\partial H}{\partial l}$ 很不稳定，难以算准。

五、测区异常场的分析

1. 各种异常图的比较

根据我们实测资料和原国测重力队的资料绘制了空间异常、布格异常、局部地形改正、局部地形改正后异常，点高程内插的空间异常及 δg 等图。从空间异常图来看，山愈高者正值愈大，南线诸大山的等异常线均呈围绕山顶的正值线，北线地形较平缓，异常线也跟着平缓下来，南线一山脉受大河横截，空间异常图上亦有明显反映，呈一负值长带，所以空间异常为局部地形所左右，变化复杂，在 14000 平方公里内变化幅度达 170 毫伽（从 −78 到 +92 毫伽），这种情况在布格图上大不相同，同样的测区，变化幅度仅 60 毫伽（从 −50 到 −110），异常随地形变化而变化的性质，在这里已经不很明显了。而在经局部地形改正后的异常 $\Delta g_{局}$ 图中，其变化又比布格异常更平缓些，这时变化幅度下降为 45 毫伽（从 −50 到 −95 毫伽），特别突出的是所有山顶上都得到了展平，在这些地方几乎看不出它与地形有什么联系了。

局部地形改正 $\Delta g_{地}$ 与地形有十分密切的关系，比高不大时其值甚小，在山顶上一般都达到较大之值，而其走向亦与地形相仿。

δg 图与 $\Delta g_{地}$ 图有类似之特点，由于在山头上 Δg 多为正值，$H - H_0$ 又为负；在谷地 Δg 多为负值，而 $H - H_0$ 多为正值，所以不论在山顶或谷地的 δg 都多为负值，δg 的变化亦与地形起伏有密切关系，从计算的结果中看来 δg 具有与 Δg 同样的数量级，如在 A 点 $\delta g = -54.1$ 毫伽，B 点 $\delta g = -74.3$ 毫伽，C 点 $\delta g = -52.7$ 毫伽，D 点 $\delta g = -53.3$ 毫伽，所以不能把 Δg 仅看成是一个微小的改正值，δg 的变化幅度也达 85 毫伽（从 −75 到 +10）。

由原所测资料绘制的空间异常图与我们加密后所得到的空间异常图进行比较，差别甚大，因为前者在许多高山上没有重力点，而原资料经点高程间接内插后所得的新的空间异常图（特别是按第二方案内插的）就与我们加密后的空间异常图接近得多了，这也说明点高程内插可以起到一定的加密的作用。

从这些异常图的比较中可以看出天文点上施测重力的重要性，如 A 点实测空间异常为 +91.7 毫伽，按原资料内插出只有 +30.0 毫伽（按点高程间接内插为 111.9 毫伽），这个差别将会给内环计算带来很大误差。

2. 代表误差的计算

代表误差是表征异常场特征的一个重要工具，也是设计重力测量的一个主要依据。格

拉夫-亨特用统计方法得到一个估算公式

$$E = c(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

c 是某一常数，但它随着地区的特点而改变，研究代表误差就在于确定代表误差系数 c 值，亨特本人曾经求得 $c = 0.55$，后来许多作者根据不同的资料也得到了各种结果，但过去的推算多限于平原和丘陵地区，对山区，特别是像试验场这种大山区，却很少研究。所以我们这次用试验场密集的资料计算了各种异常的代表误差系数，结果列于表 6 中。

表6 c 值 计 算

地　区	异常类型	所用总面积（平方公里）	$x=4$公里 $y=2$公里	$x=4$公里 $y=4$公里	$x=8$公里 $y=4$公里	$x=8$公里 $y=8$公里	平均
D点附近	$\Delta g_{空}$	352	3.01	2.77	3.38		3.05
南　线	$\Delta g_{空}$	1464	2.04	2.35	2.85		2.41
北　线	$\Delta g_{空}$	1792		1.22		1.37	1.30
南　线	$\Delta g_{布}$	1152			0.69	0.68	0.68
北　线	$\Delta g_{布}$	1250			0.37	0.44	0.40
南　线	$\Delta g_{局}$	1024	0.38	0.40			0.39
北　线	$\Delta g_{局}$	1040	0.29	0.39	0.36		0.35
D点附近	δg	256		1.44		1.81	1.62
南　线	δg	960		0.88	1.12	1.22	1.07
北　线	δg	1152		0.53		0.50	0.52

在计算代表误差过程中，由于重力点分布不均匀，不便工作，所以采用下述方法，即在1/20万 异常图上，作 2 × 2 平方公里面积的方格，然后取方格中心异常值作为计算基础，取若干个小方格合并取出平均异常，再求出平均异常与各小方格中心异常之差，由此算出中误差，即为代表误差，除以 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ 即得系数 c。

从表 6 中之值，可以得到下面一些认识：

（1）大山区（南线）空间异常代表误差系数甚大，在天文点（如 D 点）附近竟达 3.0 之巨，这比苏联山区数据大得多，比别利年建议采用的数值（$c = 1.5$）大了一倍，这表明如果用空间异常的 c 来布点时，则我国山区天文重力水准的内环重力点要大大增加，如果计算时，用布格异常作间接内插，则现有布点就不成问题了，因为南线布格异常的 $c = 0.68$，小于我国的设计数据。

（2）布格异常和经局部地形改正后的异常，其代表误差系数比空间异常代表误差系数要小得多，$\Delta g_{布}$ 的 c 最大为 0.68，$\Delta g_{局}$ 的 c 最大为 0.39。所以 $\Delta g_{局}$ 中局部地形的影响消除得最好，但布格异常中亦已消除了大部局部地形的影响。

（3）大山区（南线）$\Delta g_{局}$ 的 c 比 $\Delta g_{布}$ 的 c 减小得比较显著，而小山区（北线）则不甚显著，这说明在地形复杂的地区内局部地形改正的显著作用。

（4）δg 的代表误差仍然很大，当然小于空间异常，所以 δg 的变化在山区还是相当复杂的。

六、最后成果的分析

1. 未加 δg 的成果分析

现在把上面第三和第四所得的未顾及 δ_g 的短边成果列于表 7。

表 7　各短边天文重力水准成果(未加 δg)　（单位：米）

南　　线

		A—*B*	*B*—*C*	*C*—*D*	*D*—*E*	*E*—*F*
平差前	$2l$	19853.84	20324.95	21018.60	23357.35	13353.47
	$\Delta\zeta_{天}$	+0.448	+0.408	+0.743	−0.178	−0.126
	$\Delta\zeta_{空}$	+0.598	+0.265	+0.557	−0.480	−0.038
	$\Delta\zeta_{布}$	+0.474	+0.229	+0.581	−0.529	−0.094
	$\Delta\zeta_{地}$	+0.492	+0.298	+0.590	−0.528	−0.093
平差后	$\Delta\zeta'_{天}$	+0.418	+0.379	+0.713	−0.207	−0.156
	$\Delta\zeta'_{空}$	+0.582	+0.248	+0.540	−0.697	−0.055
	$\Delta\zeta'_{布}$	+0.476	+0.230	+0.583	−0.528	−0.092
	$\Delta\zeta'_{地}$	+0.483	+0.289	+0.581	−0.537	−0.102

北　　线

F—*G*	*G*—*H*	*H*—*J*	*J*—*K*	*K*—*L*	*L*—*A*	ω
15305.91	10105.79	19727.69	18034.63	18471.22	15248.52	
−0.389	−0.257	−0.553	−0.197	+0.136	+0.289	+0.324
−0.327	−0.209	−0.461	−0.115	−0.003	+0.598	+0.183
−0.341	−0.231	−0.479	−0.058	−0.003	+0.429	−0.022
−0.332	−0.226	−0.446	−0.088	+0.026	+0.406	+0.099
−0.418	−0.287	−0.582	−0.227	+0.107	+0.260	0.0
−0.344	−0.226	−0.478	−0.132	−0.020	+0.582	0.0
−0.339	−0.229	−0.477	−0.056	−0.001	+0.431	0.0
−0.341	−0.235	−0.455	−0.097	+0.017	+0.397	0.0

对短边成果进行如下讨论：

（1）从短边四种成果的闭合差来看，均符合低精度天文重力水准的精度要求（$\omega = 0.057\sqrt{L}$），除天文水准以外，其余三种短边成果还达到高精度的要求($\omega = 0.023\sqrt{L}$)。

（2）布格异常与局部地形改正异常所得结果很接近，一般仅差 1—2 厘米，最大不超过 6 厘米，所以布格异常是可以满足精度要求的。

（3）空间与布格成果在比高较小的地区比较接近，比高大的地区偏差就比较大（如 *A*，*D*，*L* 各点)其原因可能是重力点多设于山顶，谷地较少，而且有些点其内环的重力点分布也不够均匀。

对各种方法所得的长边（*A*—*F*）成果作如下讨论，先把长边成果列于表 9。

从表 9 中可以看出下面一些问题：

表 8 短边中误差计算* （单位：米）

	A—B	*B—C*	*C—D*	*D—E*	*E—F*	*F—G*
$V_{天}$	+0.065	−0.090	−0.132	−0.330	+0.054	+0.077
VV	0.004225	0.008100	0.017424	0.108900	0.002916	0.005929
$V_{空}$	−0.099	+0.041	+0.041	+0.160	−0.047	+0.005
VV	0.009801	0.001681	0.001681	0.025600	0.002209	0.000025
$V_{布}$	+0.007	+0.058	−0.002	−0.010	−0.010	−0.002
VV	0.000049	0.003364	0.000004	0.000100	0.000100	0.000004

G—H	*H—J*	*J—K*	*K—L*	*L—A*	*m*
+0.052	+0.127	+0.130	−0.090	+0.137	±0.145
0.002704	0.016129	0.016900	0.008100	0.018769	
−0.009	+0.023	0.035	+0.037	−0.185	±0.088
0.000081	0.000529	0.001225	0.001369	0.034225	
−0.006	0.022	−0.041	+0.018	−0.034	±0.027
0.000036	0.000484	0.001681	0.000324	0.001156	

* 以 $\Delta\zeta_{地}$ 为标准数据

表 9 长边（*A—F*）高程异常成果表

顺序	方 式	异 常	由南线推得	由北线推得	平 均
1	直接计算	（天文水准）			+1.822 米
2	短边递推	（天文水准）	+1.295 米	+0.971 米	+1.133 米
3	短边递推	Δg	+0.702 米	+0.517 米	+0.610
4	短边递推	$\Delta g_{布}$	+0.661 米	+0.683 米	+0.672
5	短边递推	$\Delta g_{局}$	+0.759 米	+0.660 米	+0.710
6	直接计算	Δg			+1.139
7	直接计算	$\Delta g_{布}$			+0.566
8	直接计算	$\Delta g_{局}$			+0.689
9	直接计算	Δg(总局)			+1.260
10	直接计算	$\Delta g_{布}$(总局)			+0.876
11	直接计算	$\Delta g_{布}$(点高程 I)			+1.268
12	直接计算	$\Delta g_{布}$(点高程 II)			+0.847

顺序栏中的 2 和 6 栏的结果很接近，这说明短边天文水准与长边天文重力水准给出了同样的精度；

5 栏中给出的数值可以当作 *A—F* 两点高程异常的标准值 （因为这个结果采用较完善的内插方法）。将其它各栏之结果与之比较，就可以看出改进内插方法对提高计算精度的明显趋势，凡是用布格异常所得的结果都比空间异常大有改进，所以说改进内插方法是提高计算精度的重要途径；

6 和 7 两栏分别与 9，10 两栏比较后，便可看出，外环增加重力点，对成果没有明显改善，这说明目前我国山区天文重力水准的外环重力点已足够了。

从 11 和 12 栏中看出，第 II 方案的点高程内插给出了相当满意的结果，而第 I 方案的结果就差些。所以说，利用点高程进行间接内插时，必须力求内插点在平面和高程位置上

(特别是在内环和中环)都能均匀分布,以期能正确反映地形而获得比较满意的结果。

通过这次计算,我们体会到山区内环点,特别是天文点联线两侧的重力点的布设极关重要,如 C 点(天文点)附近有一个"场左"重力点,计算时曾摘去此点和保留此点得到两个结果,两者相差很大,例如对 $C—D$ 边的影响最大者竟达 15 厘米。这是什么原因呢? 我们想主要原因有二: ①"场左"本身就处于异常变化特别复杂之处, 而且又在天文点联线的附近,所以顾及此点与否,对结果影响很大;②场左附近本来重力点就比较稀,舍去此点以后空白地区就更大,加之此处异常变化又特别复杂,所以舍去此点以后使得天文点附近的异常场大受歪曲,因而给结果带来很大影响。这个事实告诉我们,山区天文重力水准的内环重力点,必须保证足够的密度和均匀度。

2. 顾及 δg 和倾斜项 $\partial H/\partial l$ 之成果分析

计算结果表明,加入 δg 和 $\frac{\partial H}{\partial l}$ 后闭合差普遍增大,我们分析有如下原因:

(1) δg 本身就很大,与 Δg 具有同样数量级,而且在山区变化也很复杂,内插误差很大;

(2) 计算 δg 之点一定要在实测重力点上。否则由于 Δg 的内插误差,将会歪曲 Δg 的计算结果,但我们在绘制外环的 δg 图时,曾经取用了一些没有实测重力值的高山点。其空间异常由图上内插而得, 内插的值皆为负值, 而实际上高山顶上应为正值。这也给 δg 的计算带来误差。

(3) 最主要的是 $\frac{\partial H}{\partial l}$ 不易算准。由结果看来,此项对 $\Delta\zeta$ 的影响不亚于空间异常,而更困难的是此值随 l 之不同而相差很大,由于这项难于算准,也给成果引进颇大误差。

(4) 顾及 δg 和 $\frac{\partial H}{\partial l}$ 后,由南北线所推算的长边结果仍有很大差别,这也说明加入这二项以后并未能改善成果,而南北线的平均值与标准值相差不大,这主要是由于取平均以后,误差已缩小了一半。

从这些计算看来,莫洛金斯基理论在实用上还存在一定困难,困难多产生于高程的比高很大的点子,从我们的成果中就可以发现,南线的 δ_g、$\frac{\partial H}{\partial l}$ 普遍比北线大, 所以实际作业时最好把天文重力水准路线敷设在比较开阔的地区,这时可以避免 $\frac{\partial H}{\partial l}$ 的计算,纵然要计算,其值也很小,不会对成果带来很大影响。

3. 精度统计

(1) 短边成果的精度统计

空间异常成果

按闭合差计算(见表 7)

$$\mu_\zeta = 0.013 \text{ 米}$$

按与局部地形改正成果比较(见表 8)

$$\mu_\zeta = 0.021 \text{ 米}$$

从递推 $A—F$ 两点成果与长边标准结果 0.710 米(见表 9)比较

$$M_\zeta = 0.010 \text{ 米}$$

南线

$$\mu_\zeta = 0.001 \text{ 米}$$

北线

$$\mu_\zeta = 0.020 \text{ 米}$$

布格异常成果

按闭合差计算(见表 7)

$$\mu_\zeta = 0.002 \text{ 米}$$

按与局部地形改正成果比较(见表 8)

$$\mu_\zeta = 0.0064 \text{ 米}$$

从递推 $A—F$ 两点结果与长边标准结果 0.710 米(见表 9)比较

$$M_\zeta = 0.0042 \text{ 米}$$

南线

$$\mu_\zeta = 0.005 \text{ 米}$$

北线

$$\mu_\zeta = 0.003 \text{ 米}$$

(2) 长边成果的精度统计

空间异常成果

按总局原布点资料(见表 9)

$$\mu_\zeta = 0.061 \text{ 米}$$

按加密后资料(见表 7)

$$\mu_\zeta = 0.047 \text{ 米}$$

布格异常成果

按总局原布点资料(见表 7)

$$\mu_\zeta = 0.019 \text{ 米}$$

按加密后资料(见表 7)

$$\mu_\zeta = 0.016 \text{ 米}$$

现在从这些 μ_ζ 中确定精度估算公式最后所需之 μ_ζ 值，为了安全起见，我们取其中较大者并放宽 50% 来估算。

按短边成果

$$\left.\begin{aligned} &\text{用空间异常} \quad M = 0.03\sqrt{L} = 0.007\sqrt{SL} \\ &\text{用布格异常} \quad M = 0.01\sqrt{L} = 0.002\sqrt{SL} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

按长边成果

$$\left.\begin{aligned} &\text{用空间异常} \quad M = 0.081\sqrt{L} = 0.009\sqrt{SL} \\ &\text{用布格异常} \quad M = 0.025\sqrt{L} = 0.003\sqrt{SL} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

两组公式很接近，为了统一起见，建议采用其中较大者，即 (33) 式作为今后估算山区

天文重力水准精度的实用公式。

七、结　论

在本文结束之前，通过计算所得的一些主要意见归纳如下：

（1）高山地区可利用天文水准推求高程异常，天文点距为 15 公里左右，天文点可用 T_3 加 60° 棱镜按等高法测定，测量精度在 ±1″.0 以内，如果有条件时，天文水准应尽量沿开阔地区内推进，但应避免局部地形的影响，例如避免在山坡上施测。天文点一般可设于 I，II 等三角点上，这样既传递了高程异常又求得了三角点的垂线偏差。如果有特殊困难，天文点不能设于三角点上时，可以另选适合的点子，这时大地坐标只要用交会法以 5 米左右的精度施测就足够了。

根据我们这次试验工作看来，在山区施测天文水准不论内外业都比施测天文重力水准省事。

（2）目前我国的天文重力水准布点方案基本上是合适的。从代表误差看来，比原设计大一些，所以内环重力点应作适当加密，并在平面和高程位置方面都力求均匀布置。尤其是天文点联线附近更应如此，天文点上必须施测重力。

（3）山区天文重力水准不能直接用空间异常进行计算，必须通过间接内插的方法。我们认为在有较好地形图地区采用布格间接内插较为合适，这个方法可以提高相当多的精度，而增加的工作量并不很多，在没有地形图的地区可采用高程内插方法，但这时应尽量选取能反映地形概貌的点子。

（4）莫洛金斯基改正项数值很大，在地形复杂地区很难算准。关于这个问题有待进一步研究。

参　考　文　献

[1] 陈永龄、叶冠玉：我国大地水准面的特征及椭球体定位问题，国家测绘总局研究所研究参考资料 86 号，测绘出版社，1964 年。

[2] 方俊：中国的重力公式，Journal of the Chinese Geophysics society, 2, (1952).

[3] 陈永龄等：大地测量学，上册，商务印书馆，1951 年。

[4] 韩天芑：1953 年淮河经纬度测量工作报告，测量专刊第 1 号，科学出版社，1955 年。

[5] 丘其宪：我国高程异常测定的情况和今后意见，国家测绘总局研究所研究参考资料 103 号，测绘出版社，1964 年。

[6] 武汉测绘学院天文重力教研组：大地天文学下册，中国工业出版社，1961 年。

[7] Молоденский, М., Еремеев, В., Юркина. М., Методы Изучения Внешнего Гравитационного Поля И Фигуры Земли, *Труды Цниигаик*, **131**, 1960.

[8] Юркина, М., Методы Исследования Фигуры Земли В Горном Районое, *Труды Цниигаик*, **103**, 1954.

[9] Bomford, Geedesy, Oxford, 1962.

[10] Rice, D. A., The Profile of American Geoid *Bull. Géod.*, No. 65, 1962.

[11] Robbins, A. r., The Profile of Geoid Crrossed the England, *Survey Review*, **17**, No. 128, 129, 1963.

[12] Olander, V. R., The Weight Function of Astroe-Geodetic Levelling, *Bull. Géod.*, No. 34, 1954.

[13] Бровар, В. В., 骆鸣津：中国天文重力水准的布置，测量制图学报，科学出版社，2 卷，4 期，1958。

[14] 中国科学院测量与地球物理研究所重力组：山区天文重力水准的布置，测量制图学报，科学出版社，第 3 卷，第 2 期，1959 年。

[15] 中国科学院测量与地球物理研究所重力组：平原地区天文重力水准的计算，测量制图学报，科学出版社，第 4 卷，第 1 期，1960 年。

[16] 许厚泽,杨慧杰: 平原天文重力水准的计算模板,测绘学报,科学出版社,第5卷,第2期,1962年。
[17] Михайлов, А. А., Курс Гравиметрии И Теории Фигуры Земли. М., Редбюро Гугк При СНК СССР. 1939.

TEST REPORT OF THE ASTRONOMICAL AND ASTRO-GRAVIMETRIC LEVELLING IN THE WESTERN MOUNTAIN AREA OF HUBEI

Xu Houze Li Ruihao Luo Mingjin
Sun Yongxiang Jiang Fuzhen
Fu Zhaozhu Zhang Chijun
(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In order to probe 1) the method of calculating height anomaly in the mountain area where astro-gravimetric levelling has been carried out, 2) the possibility of using astronomical levelling in the area where astro-gravimetric levelling has not been established yet or is difficult to establish and 3) problems such as the reasonableness to set about the existing astro-gravimetric levelling points, etc. required to be resolved in production, we have built up a test field in the western mountain area, Hubei, with an area of 1400 km², in which there is a closed loop of astronomical and astro-gravimetric levelling consisting of 11 astronomical stations and 280 gravimetric stations. The indoor calculation work has been carried out by using three kinds of interpolation method in accordance with our two drafted plans. According to the analysis of the results, some views about the astronomical and astrogravimetric works are put forward:

(1) It is possible to deduce the height anomaly by using astronomical levelling, if the distance between two astronomical stations is less than 15 km.

(2) The setting of gravity points in astro-gravimetric levelling now available in our country is basically reasonable. In the inner circle around the astronomical points especially near the connecting line of those points, the distribution of gravity points on a plane or in the height must be even. It is better to increase a certain number of gravity points in the inner circle and to measure directly the gravity values at the astronomical stations.

(3) We suggest to adopt Bouger anomaly for recovering the free air anomaly. In other hand, it seems that the Molodensky's correction term is not easily calculated accurately, and that it is not all ceratin for us to calculate it.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

ZYZY 海洋重力仪的特性*

张　善　言

摘　　要

ZYZY 海洋重力仪是另长助动型重力仪。采用强阻尼以抵抗大的垂直加速度。本文讨论了强阻尼对航行着的船上测量重力异常的影响；实验室模拟各种异常变化的方法；和实验室实验各种异常的响应。

研究及实验表明，强阻尼使得在运动着的船只上所测量的重力异常产生幅度的减小和时间的滞后。

ZYZY 海洋重力仪是另长助动型重力仪。为了抵抗大的垂直加速度，采用了强磁阻尼。以减小摆偏离另位时的角度。使之遭到很大垂直加速度时仍能正常工作。使重力仪的响应更为线性。从而也减小交叉偶合效应。

强阻尼使得在运动着的船上所测得的重力异常产生幅度的减小和时间的滞后，这方面的理论 Graf, A. 及 R. Schulze，1961 年曾研究过[1]。

一、幅度的减小及时间滞后

摆的运动方程为

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + n^2\varphi = \frac{1}{l}\Delta g \tag{1}$$

式中

ε——阻尼系数；

n——摆自振频率；

l——摆重心至转轴的距离；

Δg——重力变化。

重力改变相应于偏角的关系式为

$$\Delta g^* = \ln^2\varphi \tag{2}$$

由于强阻尼，上式中表示的重力变化 Δg^* 不等于真正的重力变化 Δg，这个矛盾问题要进行研究。

下面将研究三种重力变化。设重力异常分别为：

* 1980 年 11 月收稿。

1) Graf, *A. and R.* Schulze, *Improvments on the seagravimeter* GSS-2, *J. G. R.*, 66(6), 1813—1821, 1961.

正弦性变化；

阶跃变化；

线性变化。

1. 第一种情形——正弦性重力变化

$$\Delta g = \Delta g_0 \sin \omega t$$

式中：

ω——重力变化频率；

Δg_0——重力异常变化幅度。

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon\dot{\varphi} + n^2\varphi = \frac{1}{l}\Delta g_0 \sin \omega t \tag{3}$$

其解

$$\varphi = \frac{1}{\ln^2} \frac{\Delta g_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{n^2}\right)^2 + \frac{4\varepsilon^2\omega^2}{n^4}}} \sin(\omega t + \psi) \tag{4}$$

令

$$B = \frac{2\varepsilon}{n^2}$$

顾及(2)及 $\omega \ll n$，则记录下来的重力变化

$$\Delta g^* = \frac{\Delta g_0}{\sqrt{1 + B^2\omega^2}} \sin(\omega t + \psi) \tag{5}$$

$$D = \frac{\Delta g_0^*}{\Delta g_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2\omega^2}} \tag{6}$$

式中：

D 称为减小系数；B 称为时间常数；

Δg_0^*——为记录的重力异常变化的幅度。

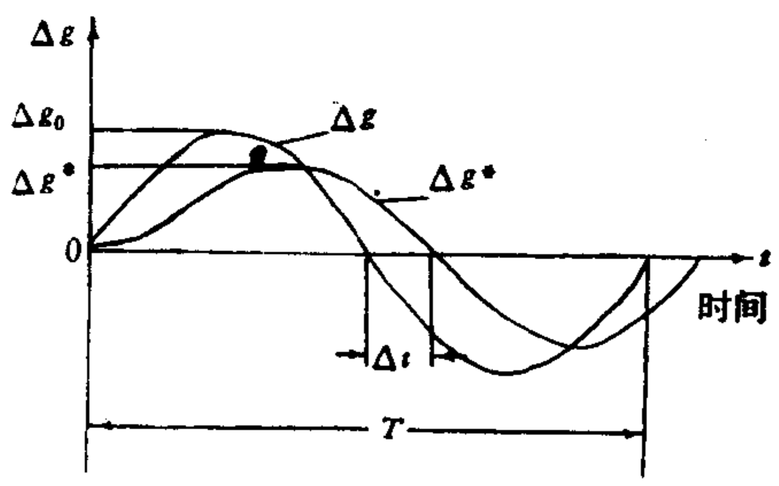


图 1　正弦性重力变化响应

$$\mathrm{tg}\psi = -B\omega$$

$$\Delta t = \frac{\psi}{2\pi} \cdot T$$

$$D = \frac{\Delta g_0^*}{\Delta g_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2\omega^2}}$$

船航行通过异常时，可视为异常逐渐上升然后又逐渐下降的近似正弦变化。设航速为 30 公里/小时 = 0.5 公里/分，通过正弦变化异常区为 5 公里，则海洋重力仪所记录下来的正弦波其周期相当于 10 分钟，并设 $B = 2$ 分钟，则由(6)式得

$$D = \Delta g_0^* / \Delta g_0 = 0.62$$

所以仪器记录下来的不是真正的重力异常，其幅度减小至 62%。

表 1

T 分	$\Delta g^*/\Delta g_0$	
	$B = 300$ 秒	$B = 120$ 秒
1	0.032	0.057
2	0.066	0.156
5	0.160	0.370
10	0.308	0.625
20	0.492	0.792
50	0.848	0.980
100	0.952	0.990
200	0.990	1.000
500	1.000	1.000
1000	1.000	1.000

表 2

T 分	Δt	
	$B = 5$ 分	$B = 2$ 分
1	0.25	0.24
2	0.49	0.45
5	1.13	1.13
10	2.00	1.44
20	3.28	1.78
50	4.50	1.93
100	4.83	2.00
200	4.95	2.00
500	5.00	2.00
1000	5.00	2.00

对不同的船速及异常范围的不同，将会产生不同的周期，所以局部异常应尽可能减低船速测定。否则幅值应考虑改正。

按(5)式幅度减小与周期关系如图 2 所示。

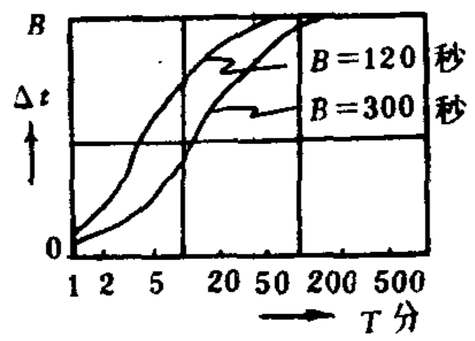


图 2 正弦性重力变化的幅度减小

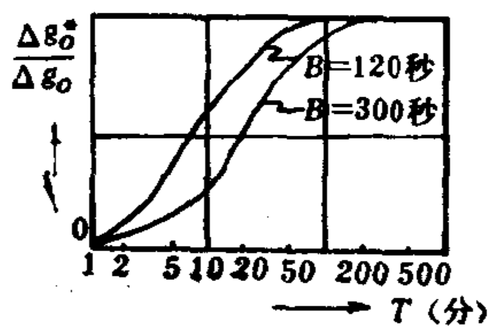


图 3 正弦性重力变化的滞后

由图 2 可见，B 分别为 120 秒及 300 秒时，则周期超过 50 分及 100 分时减小系数的减小将消失，但它对短周期却迅速减小。

除了幅度减小之外，阻尼也引起时间滞后 Δt。对于正弦变化时相差的公式：

$$\operatorname{tg}\psi = -B\omega \tag{7}$$

时间滞后为

$$\Delta t = \frac{\psi}{2\pi} \cdot T \tag{7a}$$

见图 3

2. 第二种情形——阶跃重力变化 $\Delta g = \Delta g_0$

(1) 式二阶常系数微分方程第一项是小项，可以舍去。则运动方程简化为

$$\dot{\varphi} + \frac{1}{B}\varphi = \frac{1}{B\ln^2}\Delta g_0 \tag{8}$$

上式一般解[1)]

$$\varphi = e^{-\int \frac{1}{B}dt}\left\{\int \frac{\Delta g_0}{B\ln^2} e^{\int \frac{1}{B}dt} + c\right\} \tag{9}$$

考虑到(2)由(9)可得如下方程

$$\Delta g^* = \Delta g_0(1 - e^{-\frac{t}{B}}) \tag{10}$$

这就意味着响应是时间常数 B 的指数。时间常数 B 与阻力成正比，很容易由(10)式确定。可通过弹簧力，忽然改变 Δg_0，则仪器响应为一近似指数曲线，逐渐达到新的数值，这样能很容易精确测定 B 值。由(10)计算得表 3 并绘成图 4。由表中可以看出

$t = 8B$ 时

$$\Delta g^* = 0.9997\Delta g_0$$

$$\delta\Delta g = \Delta g_0 - \Delta g^* = 3 \times 10^{-4}\Delta g_0$$

亦即以 Δg^* 代替 Δg_0，仍有 $3 \times 10^{-4}\Delta g_0$ 的误差。这个误差在实验室工作时应当注意。例如，用倾斜法测定格值，阶跃变化（即倾斜后）$\Delta g_0 = 2000$ 毫伽，那么在 $8B$ 之后仍然有 0.6 毫伽的误差。所以要根据允许的误差和阶跃重力变化 Δg_0 的大小来确定阶跃后须要多少个时间常数 B 之后才能读数。

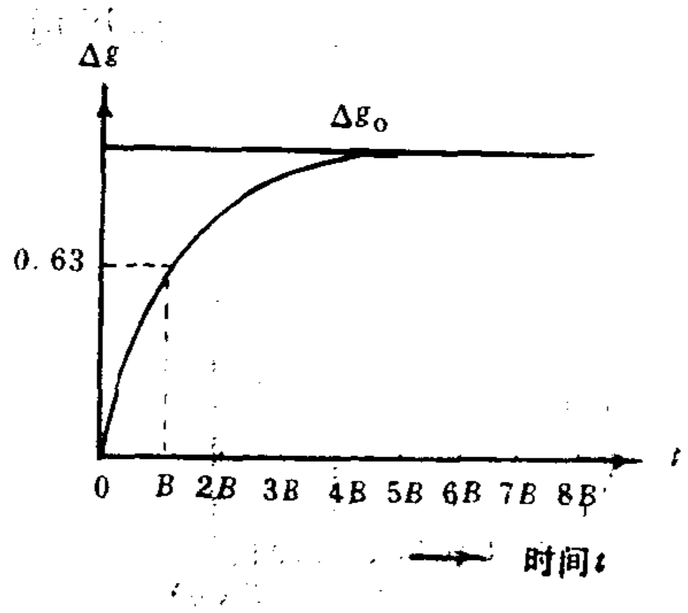


图 4 阶跃重力变化响应

表 3

t	$\frac{\Delta g^*}{\Delta g_0}$
$1B$	0.6321
$2B$	0.8647
$3B$	0.9500
$4B$	0.9818
$5B$	0.9934
$6B$	0.9975
$7B$	0.9992
$8B$	0.9997

(3) 第三种情形，线性重力变化。$\Delta g = ct$，此处 c 是常数，考虑到(2)，由(5)可得如下方程

$$\Delta g^* = cB\left(e^{-\frac{t}{B}} + \frac{t}{B} - 1\right) \tag{11}$$

现在提出这样的一个问题，什么样的瞬时 t_2 所得出的 Δg^* 等于瞬时 t_1 所指出的 Δg，亦即其滞后 $\Delta t = t_2 - t_1$ 有多大?

t_1 时实际重力变化

$$\Delta g = ct_1$$

---

1) $y' + P(x)y = Q(x)$

解：$y = e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx + c$

t_2时仪器指出的重力变化

$$\Delta g^* = cB\left(e^{-\frac{t_2}{B}} + \frac{t_2}{B} - 1\right)$$

设 $\Delta g^* = \Delta g$ 则得

$$\Delta t = t_2 - t_1 = B(1 - e^{-\frac{t_2}{B}})$$

如 $t_2 \gg B$ 则

$$\Delta t = B$$

这是十分有趣的，滞后和比率 c 无关，而且是一个不变的时间常数 B，这就可以大大地简化数据的处理（见图 5）。

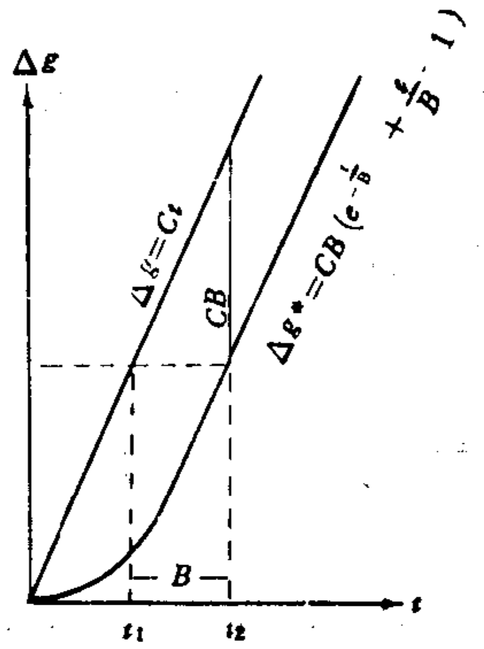


图 5　线性重力变化响应

二、实验室模拟重力变化

重力变化实际上总是连续的，如线性变化和正弦变化，阶跃变化实际中是不存在的。不管线性变化或正弦变化，总可设计专门器件来模拟这种变化。

但是我们利用强阻尼的特性也能用断续改变的方式，来模拟线性和正弦的连续变化。

1. 线性变化

$$\Delta g = ct$$

$$\delta\Delta g = c\Delta t$$

每隔 Δt 由重力仪弹簧力改变 $\delta\Delta g$，只要 $\Delta t \ll B$，则仪器响应就和连续变化 $\Delta g = ct$ 的响应相同，如图 6 所示。

2. 正弦性变化

$$\Delta g = \Delta g_0 \sin \omega t$$

$$\delta\Delta g = \Delta g_0 \omega \cos \omega t \Delta t$$

每隔 Δt，同样用重力仪弹簧力按上式关系改变 $\delta\Delta g$，同样 $\Delta t \ll B$，则仪器响应也就和连续正弦变化 $\Delta g = \Delta g_0 \sin \omega t$ 的响应相同（见图 7）。

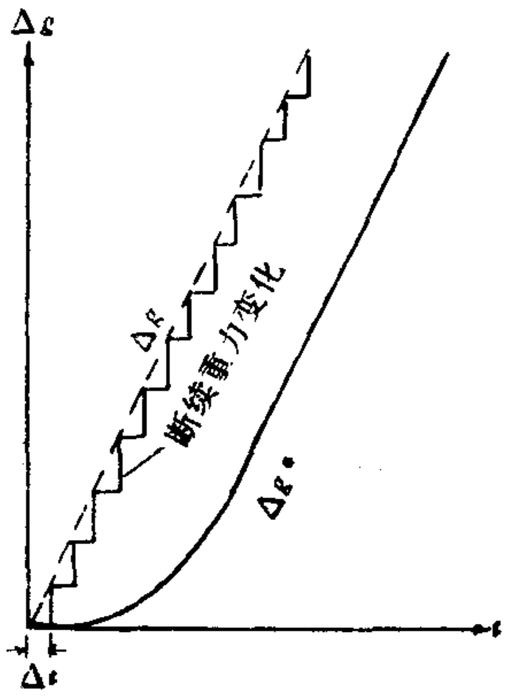


图 6　断续重力变化模拟线性变化

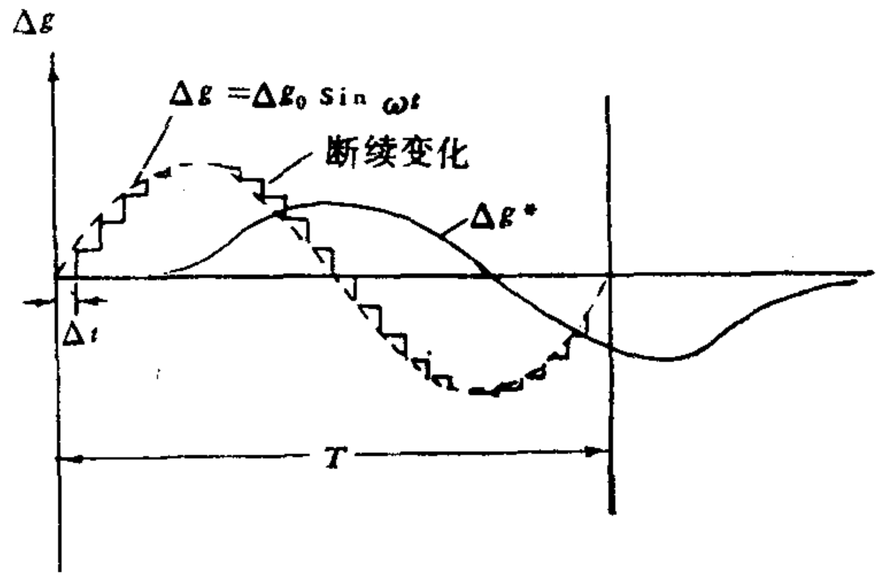


图 7　断续重力变化模拟正弦变化

$$\Delta g = ct$$

$$\Delta g^* = cB\left(e^{-\frac{t}{B}} + \frac{t}{B} - 1\right)$$

下面的研究就是按照断续的方法进行。

三、实验室的实验

仪器另有三种电阻尼 ($d = 0$ 中间阻尼 1)。 其中之一附加到仪器内部的磁阻尼上，组合成为三级阻尼 I, II, III。通常在实验室内使用阻尼 I, 在海洋上测量时用阻尼 III。

重力变化引起仪器内部摆偏移，此偏移由光电换能器换成电讯号再经过放大后，记录在记录器第一通道上。 但记录器的直接测量范围约 ±50 毫伽。因此由伺服控制系统自动地补偿重力缓慢变化所引起的偏移。

下测量弹簧随时使摆保持在零位。下测量弹簧的位置就表示重力。此位置由测量轴偶合的 360° 精密电位计的模拟电压输出，记录在记录仪的第二通道上。

一整转相当于记录器纸带全量程偏移。到达一边后，自动返回纸带的另一边。同时

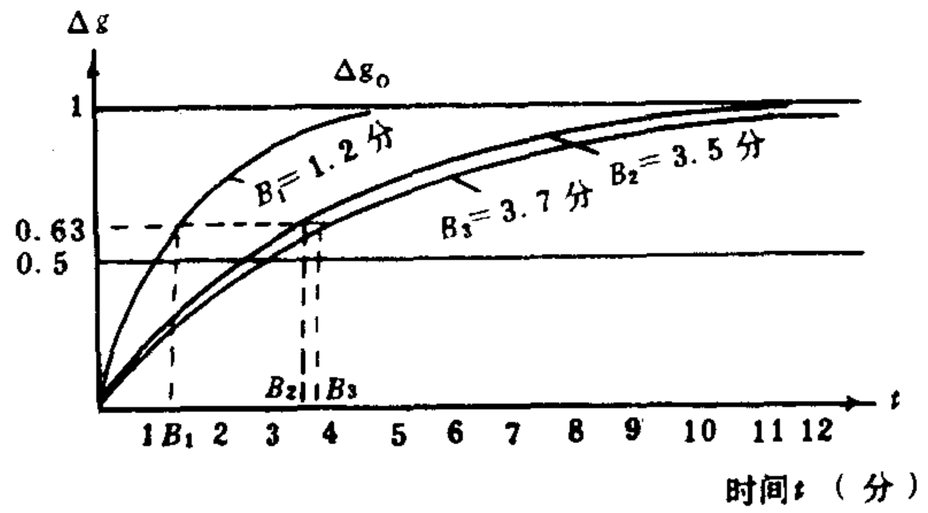


图 8　开环

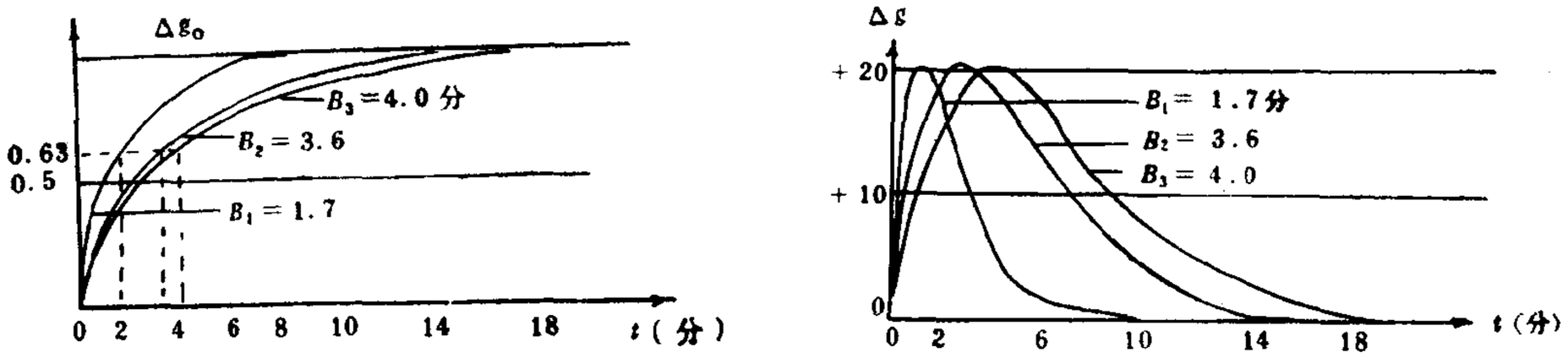
阶跃重力变化响应

这整转自动记录在仪器的记数器上，此计数器可使记录器的记录永远与测量轴的位置相对应。

实验室实验时未接伺服系统简称开环。接伺服系统简称闭环。

1. 阶跃变化

用上测量弹簧改变 Δg_0（光学 50 格），实验得出的阶跃重力变化响应，开环见图 8，闭环见图 9。



(a) 第二通道记录重力变化　　(b) 第一通道记录摆的偏移

图 9　闭环

阶跃重力变化(改变光学 50 格)两个记录通道的响应

2. 线性变化 $\Delta g = ct$

纬度效应就近似线性变化。这是海洋重力测量正常出现的现象。模拟试验时 $c = 5$ 毫伽/分。开环见图 10。闭环见图 11。

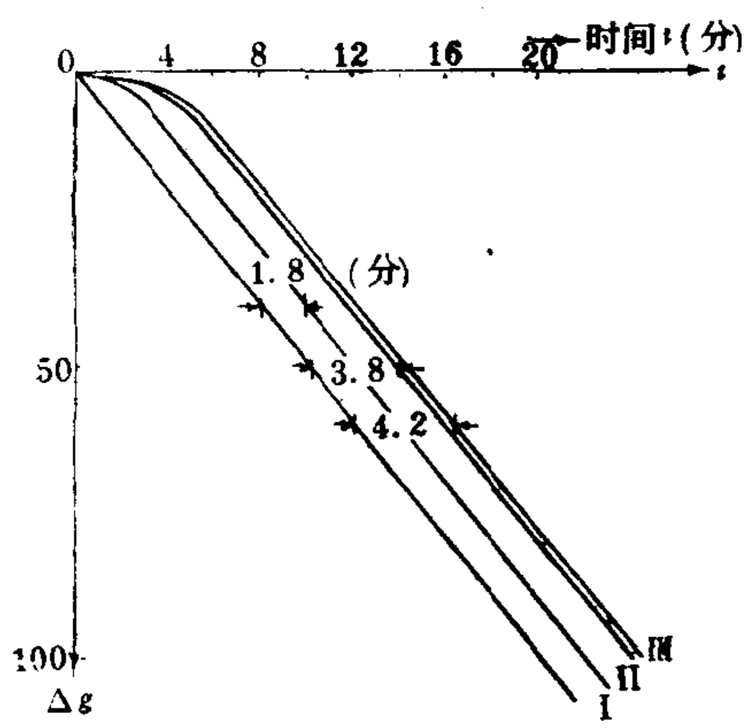


图 10　开环

线性变化响应

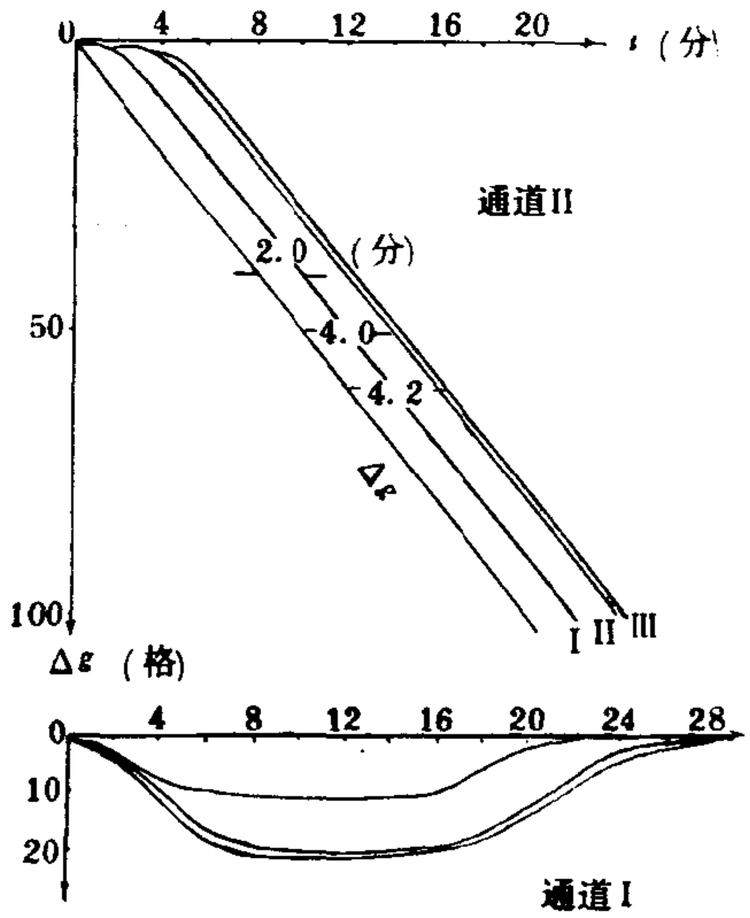


图 11　闭环

线性变化响应

3. 正弦变化 $\Delta g = \Delta g_0 \sin \omega t$

单独的重力异常，我们可以近似地把它当作正弦变化。如沿一断面的一系列异常其正弦变化有不同的幅和周期。

上面的理论研究已说明减小系数D及时间滞后 Δt 都是正弦性异常周期的函数。

试验时取 $\Delta g_0 = 20$ 光学格值，周期 12 分。模拟断续试验时，时间间隔 $\Delta t = 0.5$ 分。开环见图 12，闭环见图 13。

表 4 开 环

阻尼挡	周 期 T（分）	$D = \frac{\Delta g^*}{\Delta g_0}$	滞后 Δt（分）
I	12	0.84	1.5
II	12	0.61	2.8
III	12	0.63	2.8

表 5 闭 环

阻尼挡	周 期 T（分）	$D = \frac{\Delta g^*}{\Delta g_0}$	滞后 Δt（分）
I	12	0.82	1.9
II	12	0.65	3.0
III	12	0.65	3.0

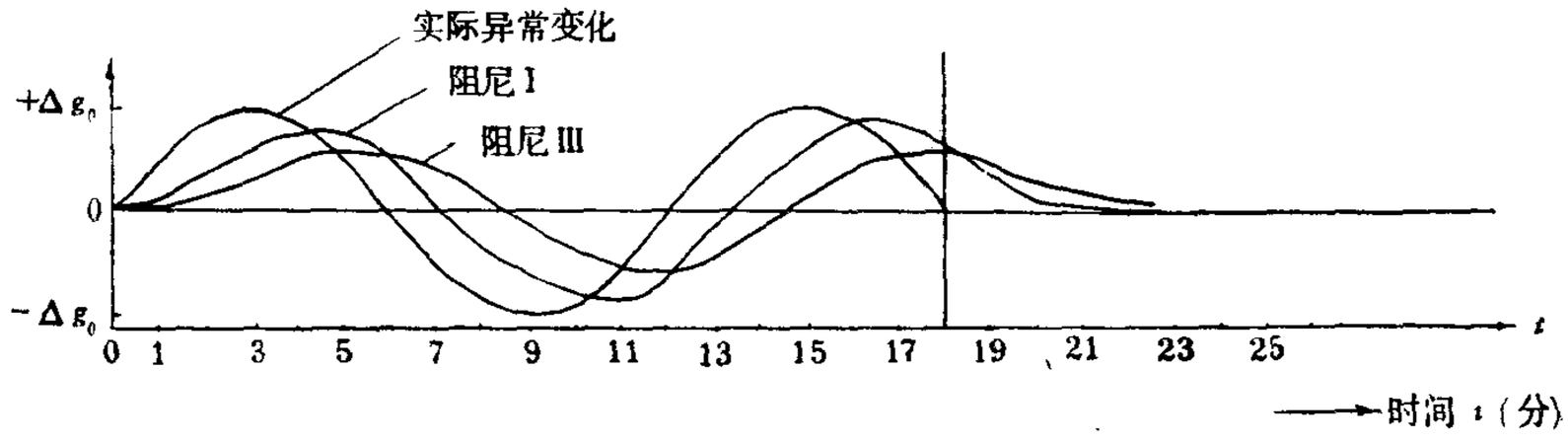


图 12 开环
正弦变化响应

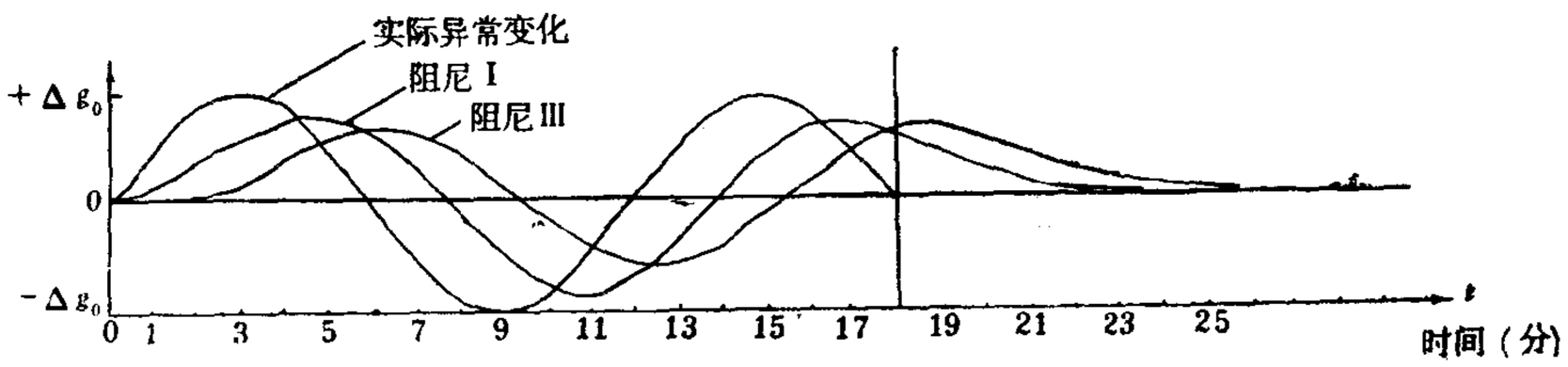


图 13 闭环
正弦变化响应

4. 半正弦波等幅度和连续改变周期

$$\Delta g = \Delta g_0 \sin \omega t$$

$$\Delta g_0 = 20 \text{ 光学格值}$$

周期T分别等于 6 分，12 分，24 分及 48 分。开环见图 14，闭环见图 15。

正弦性重力变化，减小系数和时间滞后是周期的函数。见图 16 及图 17。

表 6

阻尼挡	T 分	闭环 $\Delta g_0 = 20$		开环 $\Delta g_0 = 17.7$	
		Δg^*_{i0}	$\Delta g^*_{i0}/\Delta g_0$	Δg^*_{i0}	$\Delta g^*_{i0}/\Delta g_0$
I	6	13.0	0.65	12.0	0.68
	12	16.6	0.83	14.0	0.79
	24	19.5	0.98	16.6	0.94
	48	20.0	1.00	17.5	0.99
II	6	8.4	0.42	7.0	0.40
	12	13.0	0.65	10.2	0.59
	24	17.0	0.85	14.4	0.81
	48	20.0	1.00	16.6	0.94
III	6	9.0	0.45	7.0	0.40
	12	12.8	0.64	11.0	0.62
	24	18.0	0.90	14.8	0.84
	48	20.0	1.00	17.0	0.97

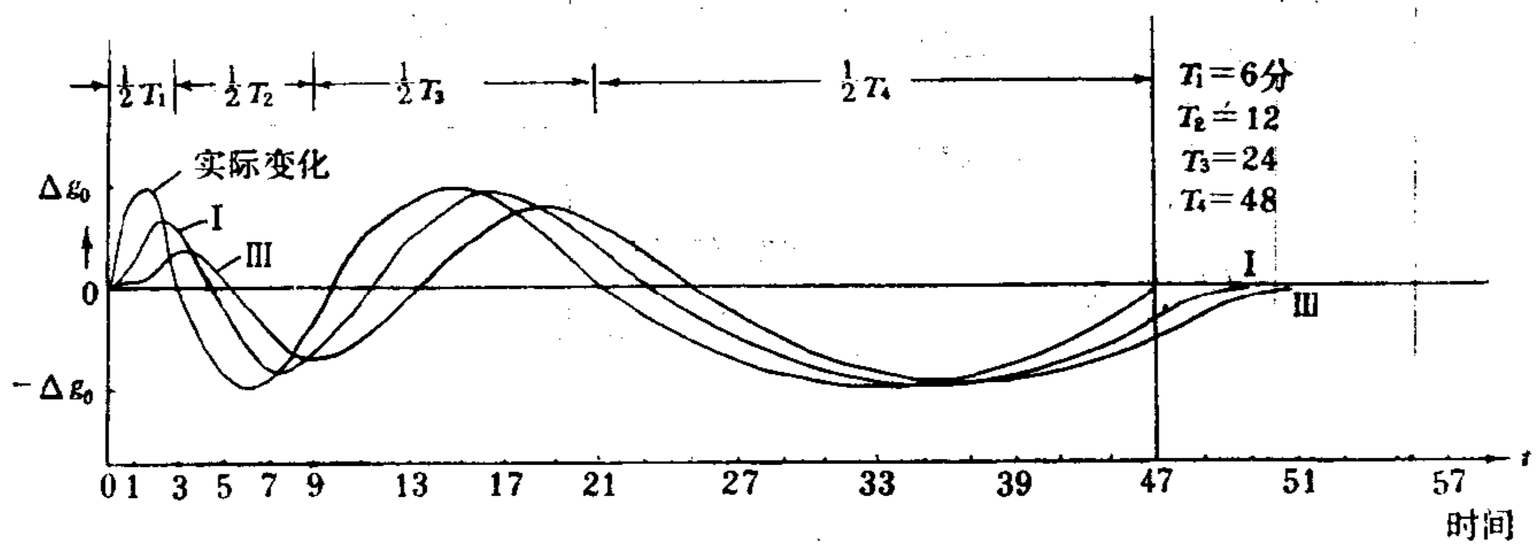


图 14 开环
半正弦波等幅度和连续改变周期的响应

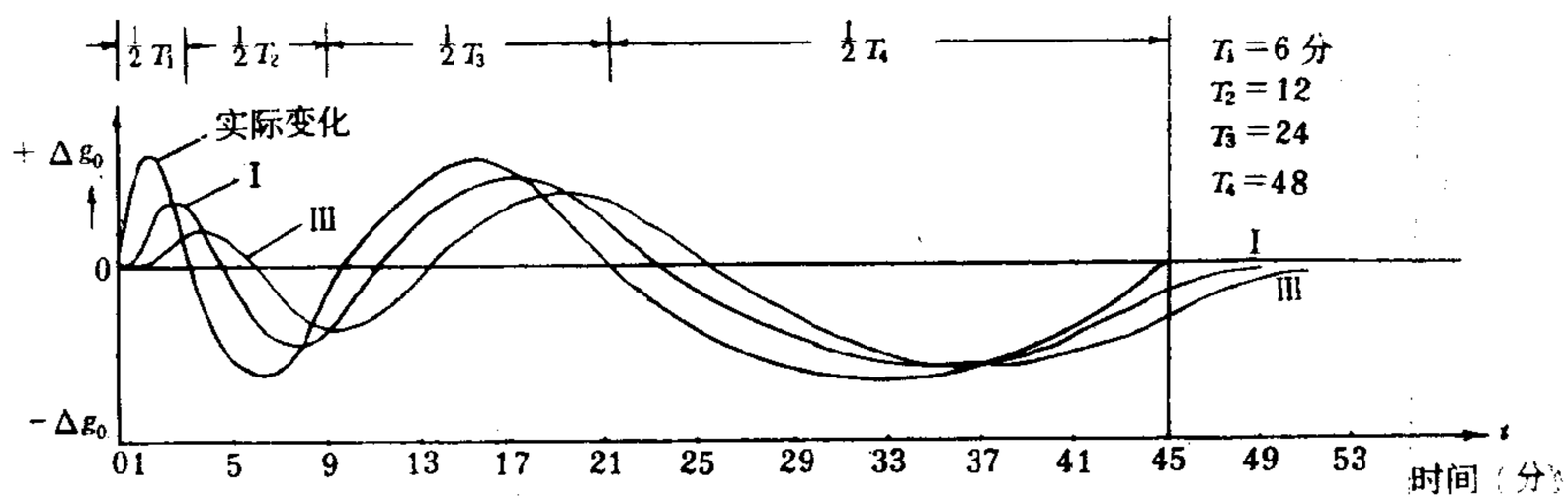


图 15 闭环
半正弦波等幅度和连续改变周期的响应

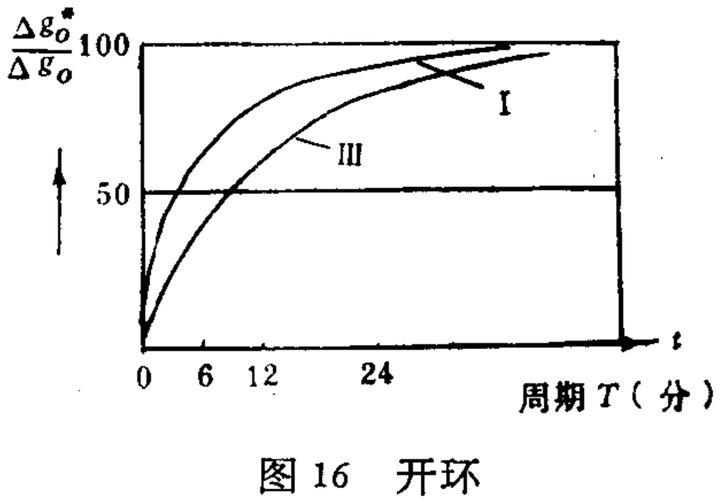


图 16 开环
连续正弦重力异常改变，减小系数是周期的函数

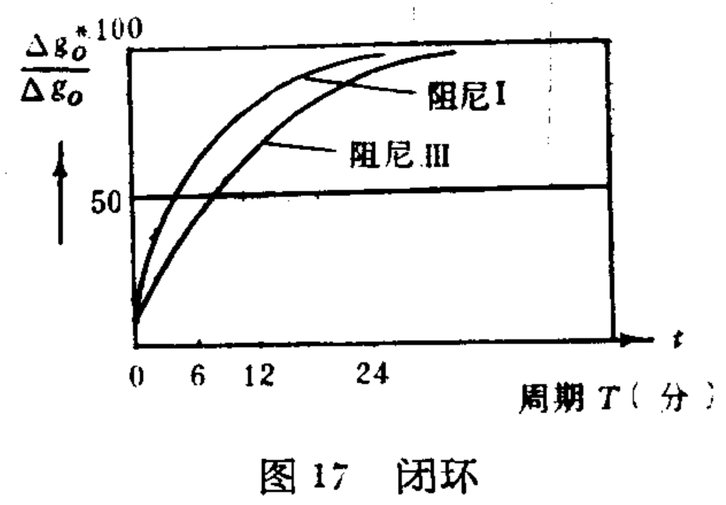


图 17 闭环
连续正弦重力异常改变，减小系数是周期的函数

5. 线性变化加正弦变化

$$\Delta g = ct + \Delta g_0 \sin \omega t_0$$

纬度效应近似线性变化，单个异常近似正弦变化。所以线性变化加正弦变化就接近

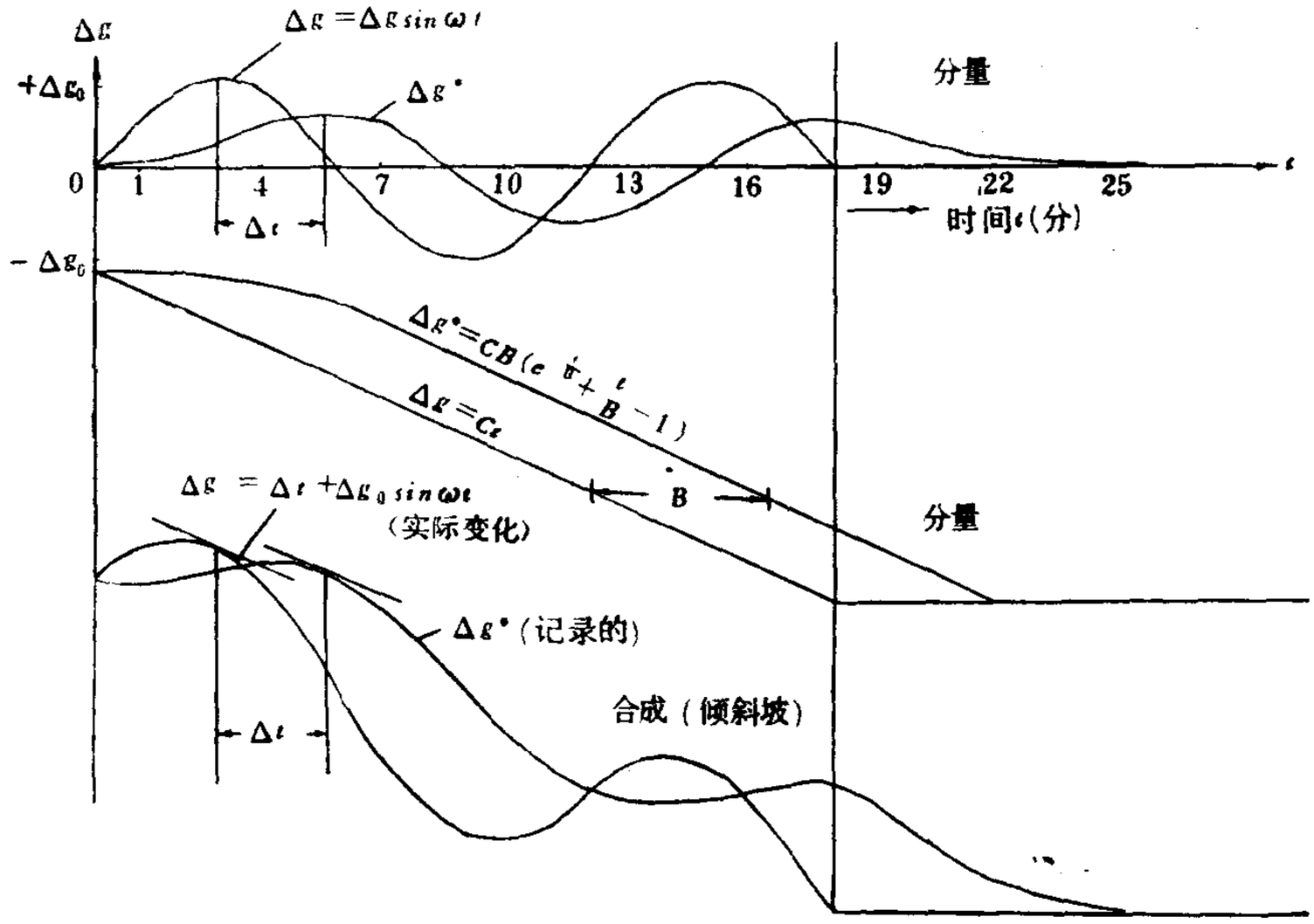


图 18 开环

线性重力变化加正弦重力变化的响应及相应的时间滞后

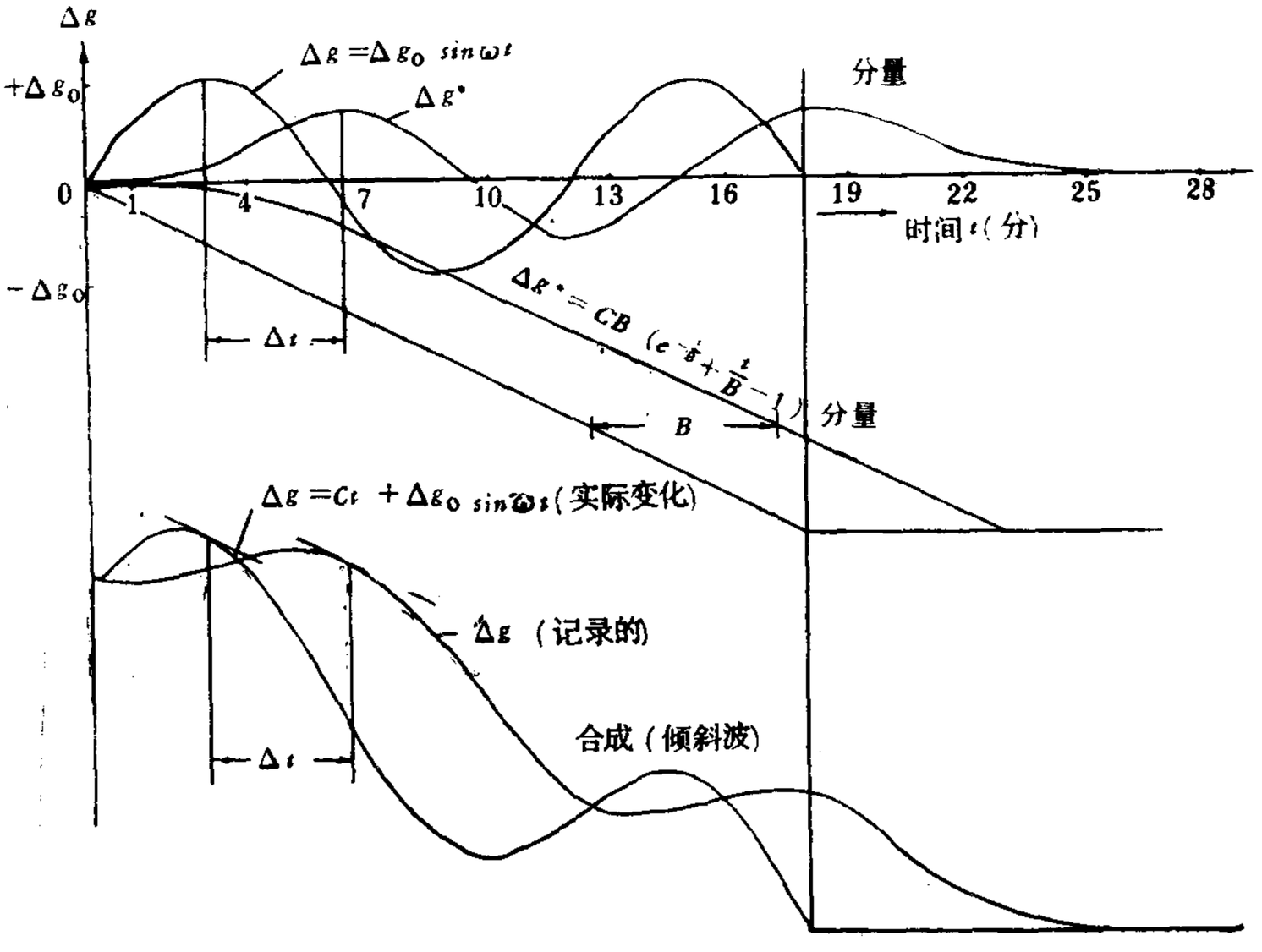


图 19 闭环

线性重力变化加正弦重力变化的响应及相应的时间滞后

倾斜正弦性异常，这是最经常出现的现象。实验结果见图 18 及图 19。由此可见，倾斜正弦性异常是线性变化响应和正弦性变化响应相叠加。

6. 各种正弦波的合成

单个异常视为正弦异常，但是经常可能的是多个异常叠加在一起。周期和幅度也可不同，这时就出现不同周期和不同幅度的正弦波合成。这方面没有做模拟实验。但根据上面的理论和本章的实验就知道它是各个正弦异常响应的叠加。

THE CHARACTERISTICS OF ZYZY SEA GRAVIMETER

Zhang Shanyan

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia S inica*)

Abstract

The ZYZY sea gravimeter is a zero-length astatic gravimeter. In order to resist large vertical acceleration, heavy damping is adopted. In this paper, the effect of heavy damping on the measuring of gravity anomaly on board a sailing ship, analogue methods of various abnormal changes and tests of response of them in the laboratory are discussed.

Investigations and experiments show that, heavy damping enables the gravity anomaly measured on board a moving ship to bring about amplitude decrease and time lag.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

精密测量仪器电子恒温系统设计*

潘　显　章

摘　　要

本文介绍了控制精度为 10^{-2}℃ 的大体积精密测量仪器用电子恒温系统的设计方案，分析了各种扰动对该系统的影响，提出了保证大体积恒温槽长时间温度精度的技术措施，并且详细地介绍了控制环路中所使用的 PI 调节器。

一、问题的由来与设计指标

一架精密的测量仪器，它的机械性能指标和电气性能指标在不同程度上均受环境温度的影响，这种影响将给测量结果带来误差，特别是一些感受信号极其微弱的机械传感器，当环境温度变化时，所产生的测量误差将大大地超过仪器所许可的精度。为了保证这些精密仪器能正常工作，通常将整个测量仪器的机械传感部分置于一被电子线路控制的恒温槽中，从而确保传感器工作在一个高稳定的环境温度之中。

精密仪器检测的物理量是十分微弱的，如微伽重力仪的灵敏度为微伽级。因此这些仪器的机械传感器都十分讲究，结构复杂，尺寸较大。要容纳下这样的机械传感器，恒温槽必须有足够大的容积。本设计的恒温槽为圆柱形结构，特点是槽内温度场分布较均匀。恒温槽的尺寸为 3.14 × 150 × 200 立方毫米，采用双层恒温技术，设计指标为 $T_{c外}$45℃，控温精度 ±0.1℃。$T_{c内}$50℃，控温精度为 ±0,01℃。对于这样大的恒温槽，再辅之以各种温度补偿措施，便能保证诸种精密测量仪器达到预期的指标。

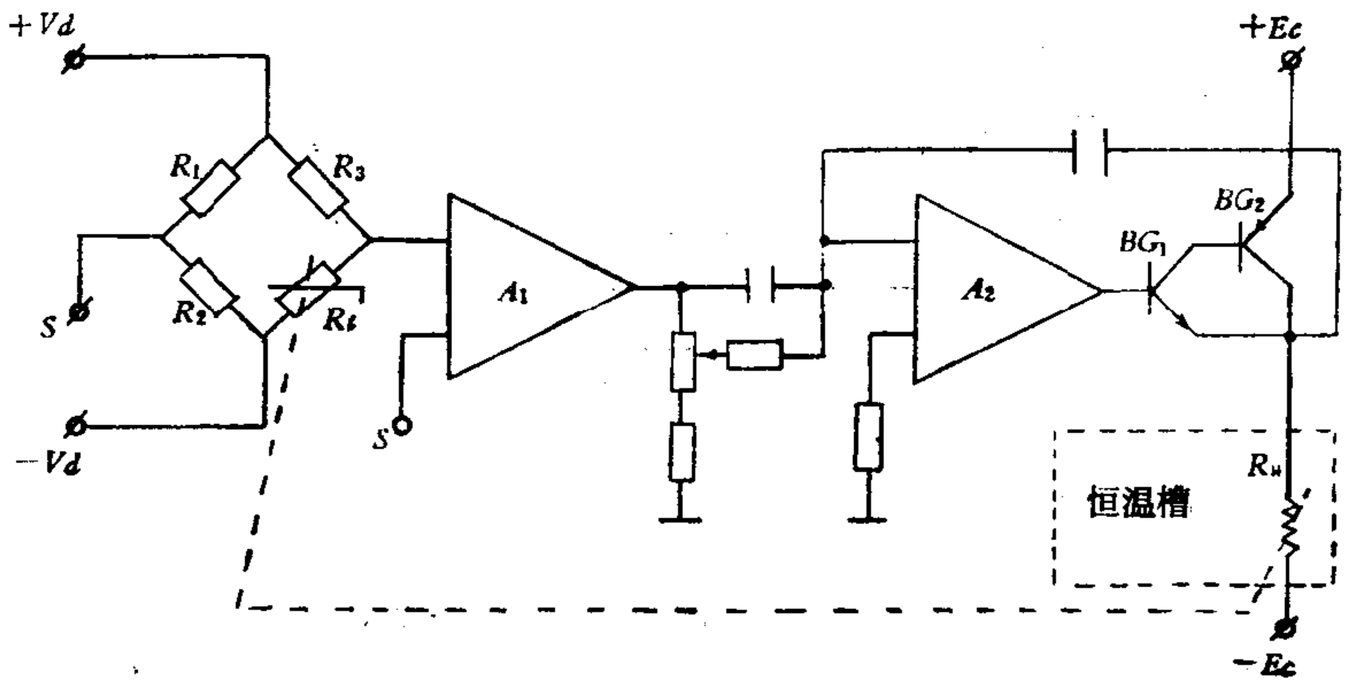


图 1　电子控温系统原理方框图

* 1981 年 4 月收稿。

由图 1 可见，控温系统的温度传感器为一直流感温电桥，热敏元件采用热敏电阻。热敏电阻比一般铂丝电阻温度灵敏度几乎高一个数量级，这对提高整个控制环路增益和提高误差放大器的信噪比是非常可贵的。

前置误差放大器 A_1 采用直接式直流电压放大器。采用这种制式的优点是线路结构简单、调整方便。我们选用 FC72 低漂移运算放大器作前置放大器，它的漂移指标仅为微伏级，因而它给整个环路带来的误差可以忽略不计。

由运算放大器 5G23C 构成之 PI 调节器，其目的是使整个系统成为二阶无差系统。功率放大器由 BG_1, BG_2 组成，它是一射极输出电流放大器。当系统达到热平恒时，理想情况下功率放大器输出电压为零，这使得热电功率转换设计计算简单，而且它保证了 PI 调节器 A_2 在热平恒点附近处于线性良好的高增益状态。

系统传递函数方框图如下：

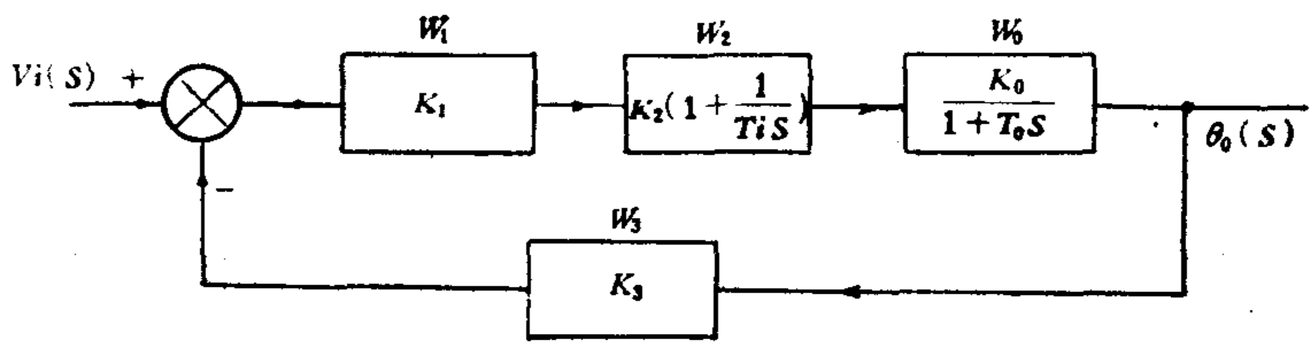


图 2　系统传递函数方框图

图 2 中，$W_1 = K_1$ 是前置误差放大器的传递函数，对于理想的线性放大器而言，K_1 为常数。$W_2 = K_2\left(1 + \frac{1}{T_iS}\right)$ 为比例积分放大器的传递函数。由于本系统的调节对象是恒温槽，只要我们设计的热结构合理，它的纯滞后是很小的，因此，采用 PI 调节规律是合适的。$W_0 = \frac{K_0}{1 + T_0S}$ 是恒温槽的传递函数，T_0 为恒温槽之时间常数。$W_3 = K_3$ 为一线性反馈环节。它由感温元件 R_t 和感温电桥组成。本系统为一恒值系统。它的给定值 $V_0(S)$ 由 R_3 的阻值所规定。$\theta_0(S)$ 为系统输出值。

由图 2 我们可以推导出系统的闭环传递函数 W_c。

$$W_c = \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_0}{1 + W_0W_1W_2W_3}$$

$$= \frac{K_0K_1K_2\left(1 + \frac{1}{T_iS}\right)\left(\frac{1}{1 + T_0S}\right)}{1 + K_0K_1K_2K_3\left(1 + \frac{1}{T_iS}\right)\left(\frac{1}{1 + T_0S}\right)}$$

$$= \frac{K_0K_1K_2(1 + T_iS)}{T_0T_iS^2 + (K_0K_1K_2K_3 + 1)T_iS + K_0K_1K_2K_3} \qquad (1)$$

观察(1)式右边之分母为一含 S 之二次多项式，也即整个闭环系统为一个二阶系统。且此多项式各次系数均为大于零之正数，因而我们设计的二阶环路是稳定的。

下面分析系统对于给定值之静差：对于一个给定的阶跃信号 $V_i(S) = \frac{1}{S}$ 系统的给定位置静差 e_p 由最终值定理可得

$$e_p = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{1 + W_0W_1W_2W_3}\right]$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{T_iS(1 + T_0S)}{T_iS(1 + T_0S) + K_0K_1K_2K_3(1 + T_iS)}$$
$$= 0 \qquad (2)$$

本系统对于给定值而言是存在给定速度误差的，同样由最终值定理给定速度误差 e_v 为

$$e_v = \lim_{s\to 0}\frac{1}{S[1 + W_0W_1W_2W_3]}$$
$$= \frac{T_i}{K_0K_1K_2K_3} \qquad (3)$$

由(3)式可以看出，要减小恒温槽温度波动，电子控制系统的开环增益必须尽可能地高。

下面对各种扰动所引起的静差进行分析和估算。

众所周知，系统的输出量 $\theta_0(S)$ 除由给定值 $V_i(S)$ 决定外，还将受到叠加到环路上的各种扰动的影响。对于环路的扰动因素甚多，我们在设计中仅考虑几种主要的扰动，即直接加入到恒温槽上的扰动 $P_0(S)$，由比例积分放大器输入端引入之扰动 $P_2(S)$ 以及由误差放大器输入端引入的扰动 $P_1(S)$。$P_0(S)$ 表征着环境温度变化对恒温槽的侵袭，末级功率放大器输出电压的漂移，以及末级加热电源电压的漂移。$P_2(S)$ 表征着比例积分放大器输入端的漂移。$P_1(S)$ 表征着前置误差放大器自身输入端的漂移，感温电桥供电电压 $\pm V_d$ 的漂移，电桥阻值的漂移以及热敏电阻阻值的自漂移。$P_0(S)$、$P_1(S)$、$P_2(S)$ 在环路上的相加点如图 3 所示。

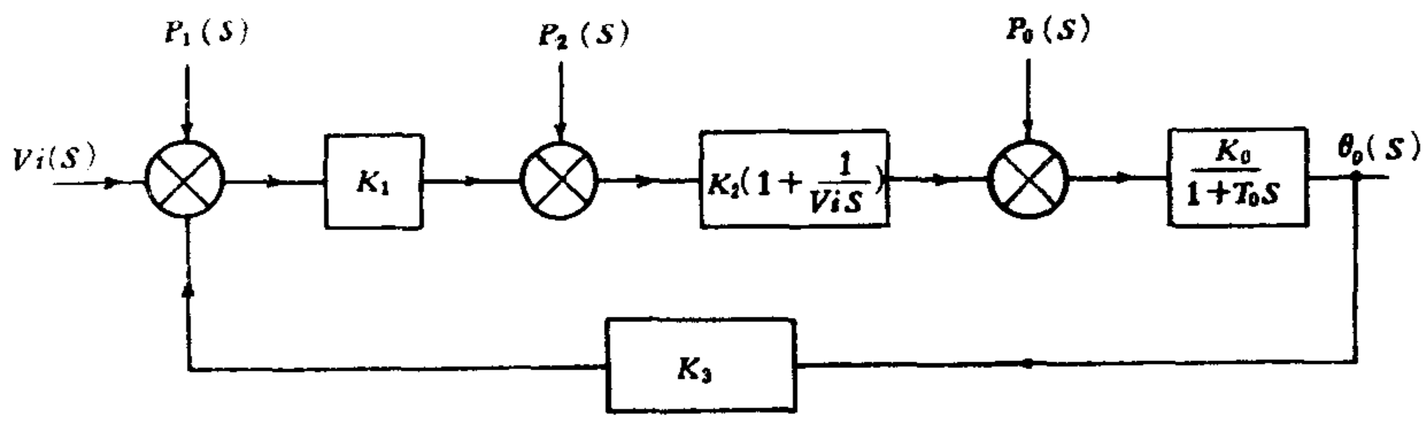


图 3　环路的诸种扰动

对扰动 $P_0(S)$ 而言，由于环路的反馈臂上包含有积分环节，因而由 $P_0(S)$ 所引起之扰动静差

$$e_{dy0} = 0$$

对扰动 $P_2(S)$ 而言，系统的扰动传递函数为

$$W_{P_2(S)} = \frac{\theta_0(S)}{P_2(S)}$$
$$= \frac{W_0W_2}{1 + W_0W_1W_2W_3}$$

$$= \frac{K_0K_2\left(1+\frac{1}{T_iS}\right)\left(\frac{1}{1+T_0S}\right)}{1+K_0K_1K_2K_3\left(1+\frac{1}{T_iS}\right)\left(\frac{1}{1+T_0S}\right)}$$

$$= \frac{K_0K_2T_iS+K_0K_2}{T_iS+T_0T_iS^2+K_0K_1K_2K_3T_iS+K_0K_1K_2K_3} \tag{4}$$

由扰动最终值定理可得

$$e_{dy2} = \lim_{s\to 0} V_pW_{p_2}(S)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{V_p(K_0K_2T_iS+K_0K_2)}{T_iS+T_0T_iS^2+K_0K_1K_2K_3T_iS+K_0K_1K_2K_3}$$

$$= \frac{V_p}{K_1K_3} \tag{5}$$

(5)式中 V_p 为扰动之幅度。

用同样的方法我们可以推导得

$$e_{dy1} = \frac{V_p}{K_3} \tag{6}$$

由于我们设计的 $K_1K_3 > 1$，故对于(5)式我们有 $e_{dy0} \doteq 0$。这样我们有理由认为扰动 $P_0(S)$ 和 $P_2(S)$ 对于系统的威协可以不予考虑，但是对于 $P_1(S)$ 的影响就必须认真对待了。

我们设计的热敏电阻感温电桥的灵敏度

$$K_3 = 0.21 \text{ 伏/度}$$

因此，假如扰动 $P_1(S)$ 的幅度 $V_{p1} = 200$ 微伏时，由(6)式可得

$$e_{dy1} = \frac{20 \text{ 微伏}}{0.21 \text{ 伏/度}}$$

$$= 10^{-3}\text{℃}$$

当

$$V_{p1} = 2 \text{ 毫伏时}$$

$$e_{dy1} = 10^{-2}\text{℃}$$

由此可见，当前置误差放大器输入端电压漂移 2 毫伏时将引起槽体工作温度 T_c 变化 10^{-2}℃。换句话说，若要保证 $\Delta T_c \leqslant \pm 10^{-2}$℃，则要求

$$\Delta V_1 \leqslant \pm 2 \text{ 毫伏}$$

由于前置误差放大器选用了低漂移运算放大器 FC72，其 $V_{os} = 0.5$ 微伏/度 V_{os} 在 6 个月内的时间漂移不会大于数十微伏，因而完全可以满足设计要求。

对于电桥电压 $\pm V_d$ 而言，由于 $R_1 = R_2$，在热平恒点上又有 $R_3 = R_t$，从理论上说 $\pm V_d$ 的变化将由于电桥输出的特性而抵销。但当电桥各臂的电阻阻值漂移而不严格相等时，此刻 $\pm V_d$ 的漂移将会引进一个 ΔV_1。本系统设计 $\pm V_d = \pm 6$ 伏，根据 $\Delta T_c \leqslant 10^{-2}$℃ 的要求，就必须保证电桥电源的稳定度要优于 10^{-5}。

如上所述，桥臂电阻 R_1 必须严格等于 R_2，R_3 是给定值电阻，因此我们采用温度系

数很小的锰铜丝绕制，并将 R_1, R_2, R_3 均置入恒温槽中。特别要指出的是热敏电阻的自漂移所引进的扰动是十分可怕的，它将引起恒温槽 T_c 长时间之慢漂移。我们设计采用美国 Yellow Spring Instrument Corporation 产品 44008 型热敏电阻，它的性能指标是：八个月内温漂不大于 100 微度。

综上所述，为了保证恒温槽长时间温度稳定所必须采用的措施为：

(1) 尽可能地提高整个环路增益；

(2) 前置误差放大器采用低漂移电路；

(3) 电桥供电电压稳压精度尽可能地高；

(4) 热敏电阻长时间自漂移小。

二、温度传感器时间常数对环路品质指标的影响

环路品质指标包括静特性和动特性，静特性由环路的静差来说明，它反映了环路的精度。动特性则用来衡量系统的快速性。

如上所述，本系统给定位置静差 $e_p = 0$。但实际上由于环路中诸电气元件的非理想性(即所谓的电气死区)，因而给定位置静差仍然存在。这也即是说在给定值不变的情况下，感温电桥的平恒温度 T_c' 与恒温槽实际稳定工作温度 T_c 之间仍然存在一小的 ΔT_c。为了减小 ΔT_c 就必须尽可能地提高系统的开环增益，由(3)式可知环路的速度给定误差 $e_v = \frac{T_i}{K_0K_1K_2T_3}$，为了减小速度给定误差，亦必须要增大开环总增益。为了增加环路的快速性，同样也要提高开环总增益。

由(1)式我们得知，本二阶系统的稳定性与环路总增益无关，即是说无限制地提高 $K_{总}$ 从理论上讲都不会引起系统振荡。实际上当 $K_{总}$ 增大到一定值时，由于环路中的一些小时间常数不再可以忽略不计，从而使系统变为高阶系统而出现振荡。这里着重分析温度传感器时间常数对环路增益的限制。

考虑温度传感器的时间常数以后，它的传递函数不再为 K_3 而记为 $W_3 = \frac{K_3}{1 + T_3S}$。为了简单说明问题，我们将 W_2 简化为 K_2/S，因而系统传递函数方框图如图 4。

由图 4 我们可得闭环传递函数

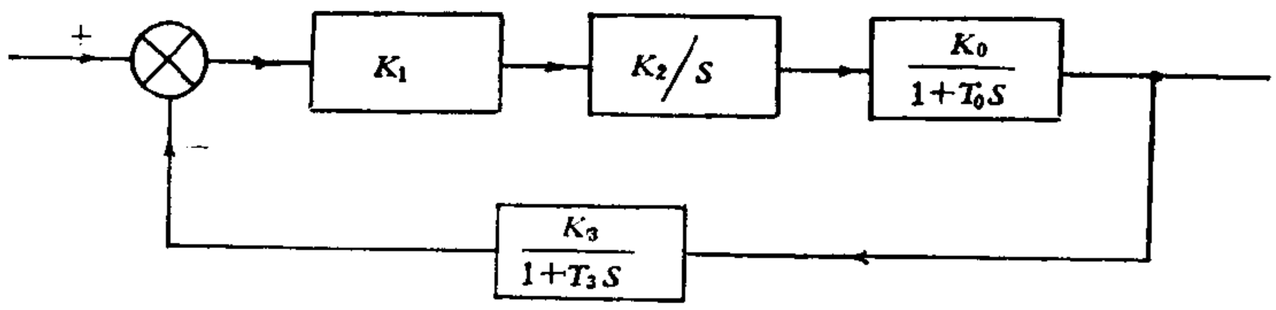


图 4　温度传感器时间常数 T_3 对环路品质指标的影响

$$W_c = \frac{W_0W_1W_2}{1 + W_0W_1W_2W_3}$$

$$= \frac{K_0K_1K_2\dfrac{1}{S(1+T_0S)}}{1+K_0K_1K_2K_3\dfrac{1}{S(1+T_0S)(1+T_3S)}}$$

$$= \frac{K_0K_1K_2(1+T_3S)}{T_0T_3S^3+(T_3+T_0)S^2+S+K_{总}} \tag{7}$$

由(7)式知，此时系统为三阶系统。其中 $b_3 = T_0T_3$，$b_2 = T_0 + T_3$，$b_1 = 1$，$b_0 = K_{总}$。

根据劳斯判据，对此三阶系统只有当 $b_2b_1 - b_0b_3 > 0$ 时系统才能稳定。将 b_0，b_1，b_2，b_3 值代入不等式中我们得到

$$b_2b_1 - b_0b_3 = (T_0 + T_3) - K_{总}T_0T_3 > 0$$

故

$$K_{总} < \frac{T_0 + T_3}{T_0T_3} \tag{8}$$

由(8)式我们可以得出这样的结论：由于 T_3 的存在，它限制 $K_{总}$ 许可的最大值；尽可能地减小 T_3，则可得到大的稳定环路增益 $K_{总}$。

我们在设计和装调中所采取的措施是：选用本身时间常数小的热敏电阻，保证热敏电阻和恒温槽内壁有极良好的接触。

三、PI 调节器及校正环节

环路的调节规律取 PI 规律。按照二阶最佳设计法，调节器之 $T_i = 2T_0K_0$。因为恒温槽之 T_0 很大，故为了保证系统整定最佳，T_i 也必须取很大的数值。对于一个典型的比例积分放大器如图 5 所示，其传递函数

$$W_A = \frac{V_0(S)}{V_i(S)}$$

$$= \frac{R_2 + \dfrac{1}{CS}}{R_1}$$

$$= \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1CS}$$

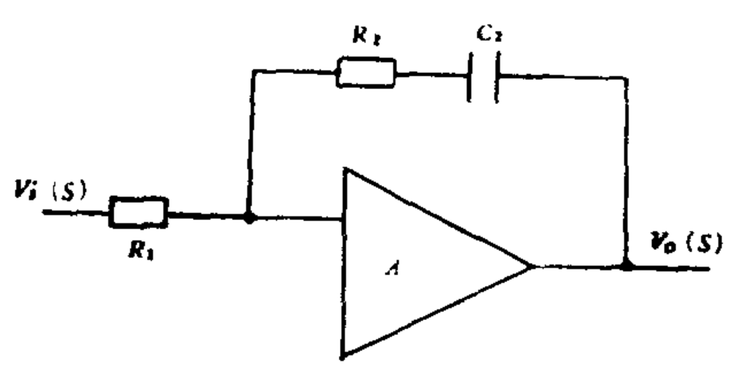


图 5　一般比例积分电路

$$= \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2CS}\right)$$

$$= K\left(1 + \frac{1}{T_iS}\right) \tag{9}$$

可见时间常数 $T_i = R_2C$。要得到大的 T_i 必须增大 R_2 和 C。R_2 取得太大会影响运算放大器的运算精度，而 C 取得太大则电容的漏电阻亦很大。漏电阻带来的危害将大大地降低电容的有效容量，同时也降低运算放大器的开环增益。因而这种原始电路很难得到大的时间常数。

本文设计的电子恒温系统中采用了一种新型 PI 调节器如图 6 所示。

由图 6 可见 $W = W_1 + W_2$。其中 $W_1 = \frac{C_1}{C_2}$。若取 $C_1 = C_2$，则 $W_1 = 1$。

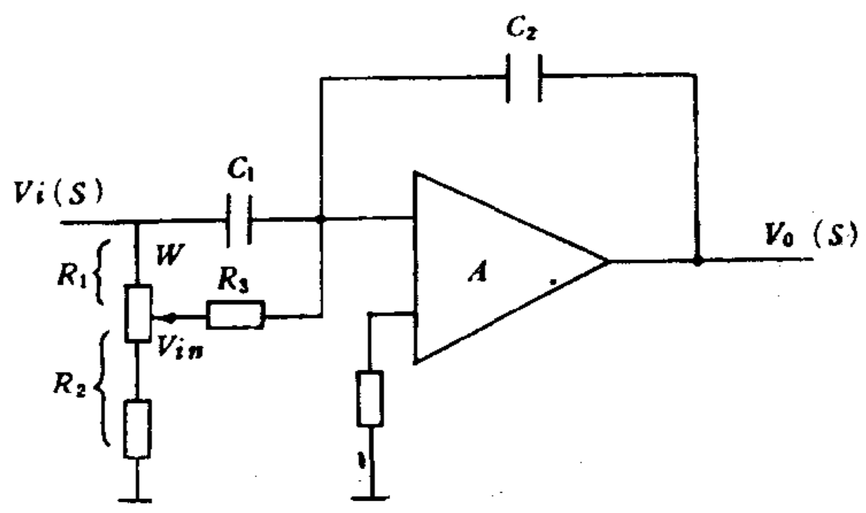


图 6　系统使用的 PI 调节器电路

又

$$V'_{in} = V_{in}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{V_{in}}{n} \tag{10}$$

其中

$$n = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

因为

$$\frac{V_0}{V'_{in}} = \frac{\frac{1}{C_2S}}{R_3}$$

$$= \frac{1}{R_3C_2C} \tag{11}$$

又

$$W_2 = \frac{V_0}{V_{in}} \tag{12}$$

将(10)、(11)式代入(12)式中可得

$$W_2 = \frac{1}{nR_3C_2S}$$

所以

$$W = 1 + \frac{1}{nR_3C_2S} \tag{13}$$

由(13)式可见 $T_i = nR_3C_2$。这样当我们调节电位器W得到很大的 n 值时，即使 C_2 仅为数微法，我们仍然可以得到很大的时间常数 T_i。使用图 6 所示的 PI 调节器，我们可以方便地通过调节电位器W的变比获得在很大范围内变化的时间常数 T_i，从而可以适应各种不同时间常数的调节对象。

当系统由于环路的 $K_{总}$ 增大而出现振荡时，可以串入图 7 所示的校正环节给予补偿，该校正环节的传递函数为

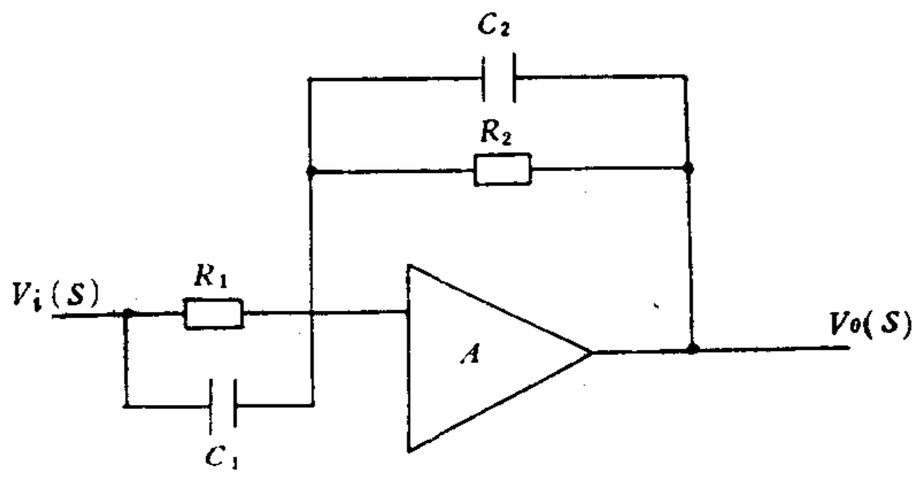


图 7　系统使用的补偿环节电路

$$W_{校} = \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_1C_1S + 1}{R_2C_2S + 1}\right)$$

$$= K_{校}\frac{T_1S + 1}{T_2S + 1} \tag{14}$$

由(14)式可见，校正环节传递函数分子分母中均有 S 的一次项，当它串入环路中不会增加环路的阶数，恰恰相反，当我们整定得使分子中的 $(T_1S + 1)$ 项抵消环路分母中造成自激的 $(T_2S + 1)$ 项而置入一安全的 $(T_2S + 1)$ 项时。这样的于串入校正环节保证了系统的稳定，并且使环路增益 $K_{总}$ 提高了 $K_{校}$ 倍。

四、电子恒温控制系统控温精度的测定

按本文设计制作之电子恒温控制系统在实验室运转中我们监测了它的控温精度。

我们用 PZ12 数字电压表监测了误差放大器 K_1 之输出电压 V_2，并用纪录仪在数周内纪录了 V_2 的漂移曲线。纪录曲线表明 V_2 幅度的变化 $\Delta V_2 \leqslant \pm 10$ 毫伏。由于前置误差放大器之 $K_1 = 1000$，因而这表明感温电桥输出电压 V_1 的幅度变化 $\Delta V_1 \leqslant \pm 10$ 微伏。

这个指标表征着恒温槽内热敏电阻采样点处温度波动远小于 $\pm 10^{-4}$℃。为了鉴定槽内空间温度波动情况，将一独立的铂金丝测温电桥置于槽体中部。测温电桥灵敏度为 3 毫伏/度。恒温槽到达工作温度十小时以后，用 PZ26 数字电压表监视测温电桥输出。当我们从 +20℃ 到 +31℃ 改变恒温槽环境温度时，测温电桥输出变化小于 ±10 微伏。可见整

个系统的精度优于 10^{-2}℃。

五、结 束 语

本文运用了自动控制原理对精密测量仪器电子恒温系统环路的设计、整个原理以及如何提高控制精度、保证长时间稳定的措施进行了讨论。由于采用了高增益低漂移的前置误差放大器和性能优良的调节器，实验数据证明本系统可达到较高的控温精度。这里必须强调的是恒温槽体本身的热结构设计应该十分考究。它要求槽体总热导要小且机械结构严格密封。只有作为调节对象的恒温槽本身性能优良，电子调节环路的设计才能达到预期的效果。

参 考 文 献

[1] 陆道政，季新宝：自动控制原理及设计，上海科学技术出版社，1978 年，第 68—71，156 页。
[2] 诸方胜彦，卢伯英译：现代控制工程，科学出版社，1976，第 396 页。

DESIGN OF ELECTRONIC THERMOSTATIC CONTROL SYSTEMS FOR PRECISE MEASURING INSTRUMENTS

Pan Xianzhang

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the design project of thermostatic system for the use in a bulky precise measuring instrument with a controlled accuracy of 10^{-2}°C is recommended. The effect of all different kinds of disturbances on this system are analysed. The technical measures for ensuring long period of temperature accuracy of thermostat with large bulk is pointed out, and PI regulator used in the control loop is introduced in detail.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

平太阳时和恒星时数字石英钟*

陶　国　祥

摘　　要

本文所叙的平太阳时和恒星时数时式石英钟是为天文观测和固体潮观测而设计的。采用了高稳定度的石英振荡器和集成电路，稳定度达到 5×10^{-9}/日。根据需要，石英钟有各种时间控制输出，并具有并行和串行数码输出，功能齐全，使用方便。经过一段时间的使用，工作正常。

一、恒星时和平太阳时

在天文学中主要使用两种时间系统；恒星时和平太阳时。

赤道和黄道之交点——春分点两次通过中天所经过的一段时间为 1 恒星日，1 恒星日分为 24 恒星时，1恒星时分为 60 恒星分，1 恒星分又分为 60 恒星秒。

平太阳时是假定有一个点在沿着赤道作匀速运动，它的周日运动速度等于真太阳日沿着黄道移动的平均速度。1 平太阳日分为 24 平太阳时，1 平太阳时分为 60 平太阳分，1 平太阳分又分为 60 平太阳秒。

恒星时与平太阳时之间的关系是

1 恒星日 = 24 小时 56 分 4 秒(平太阳日)，

即 1 恒星秒 = 0.9972696 平太阳时秒，这是我们设计恒星时钟和平太阳时钟的根据，由于器件工作最高频率的限制，我们取近似值

1 恒星秒 = 0.99727 平太阳时秒

二、平太阳时数字式石英钟

我们采用了高稳定度的 ZGF-5C 型恒温石英晶体振荡器和全集成化电路，所以平太阳时钟能做到精度高、体积小、重量轻、工作稳定可靠。

晶体的稳定度 48 小时后进入 1×10^{-8}/日，7 天后进入 5×10^{-9}/日，这样每天的时差 Δt 为

$$\frac{\Delta f}{f_0}=5\times10^{-9}$$

$$\Delta t=5\times10^{-9}\times24\times3600=423\text{ 微秒}$$

* 1981 年 4 月收稿。参加该项工作的还有周梅芳、周百力等。

式中 f_0 为晶体的振荡频率，Δf 为每天振荡频率的偏移量。所以，一年的最大时间误差为

$$t = 360 \times 432 \text{ 微秒} = 0.15768 \text{ 秒}$$

这样大约 6 年石英钟的误差为 1 秒。电原理图如下：

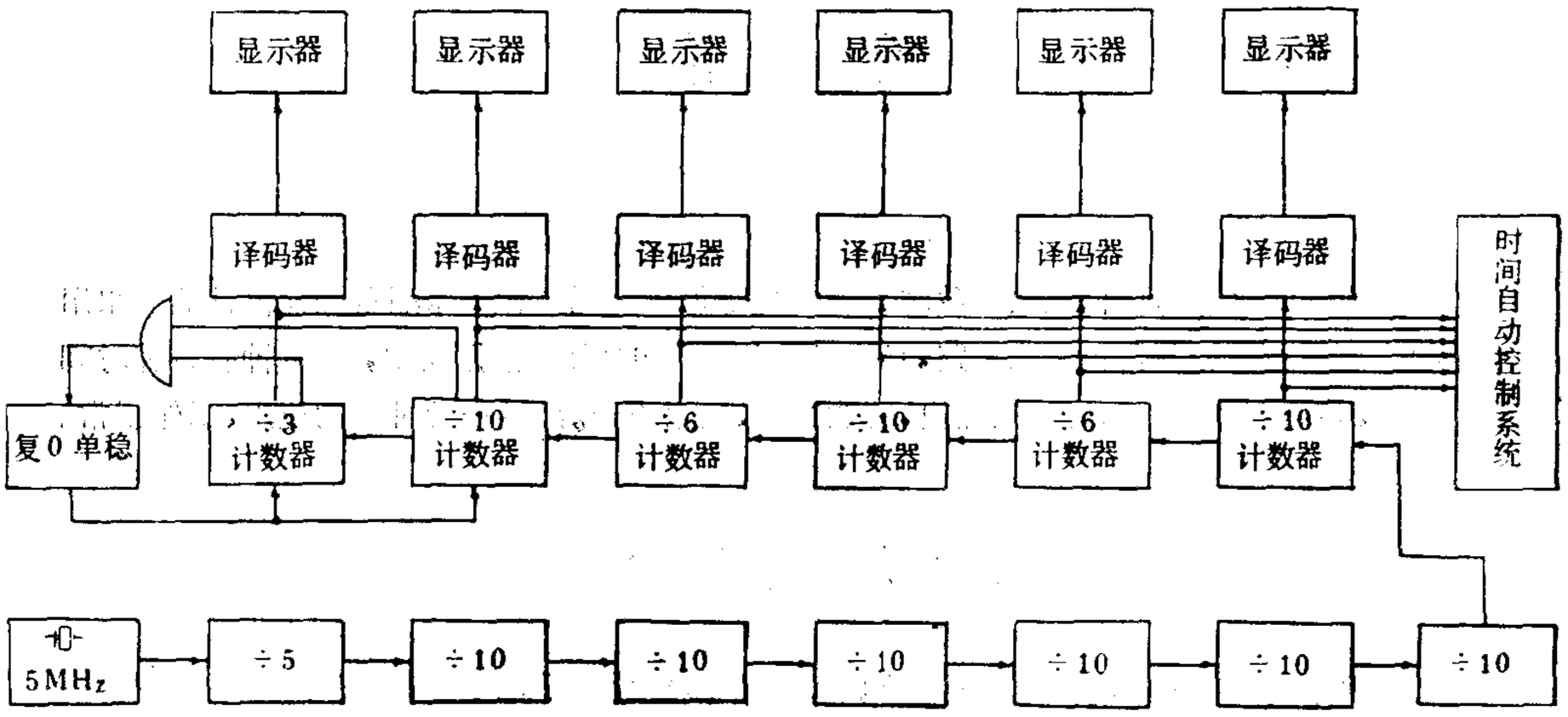


图 1　平太阳时数字式石英钟电原理图

5 兆赫晶体振荡输出的正弦信号，整形后变成脉冲信号，先除 5，然后除 10^6，变成为 1 周/秒的秒脉冲信号，送到计数器计数就是平太阳时，通过译码器，然后由显示器用数字显示出来，到 24 小时时，由逻辑电路自动复零。

因为钟本身是一个高精度的时间系统，所以可以用它来产生任何时间的逻辑控制，如产生自动记录指令、自动打印指令、定时接通或断开所需要的仪表、自动报警等等。

三、数字式恒星时石英钟

包括一台母钟和多台子钟，母钟的信号源来至高稳定度的大石英钟的 100 千赫的信

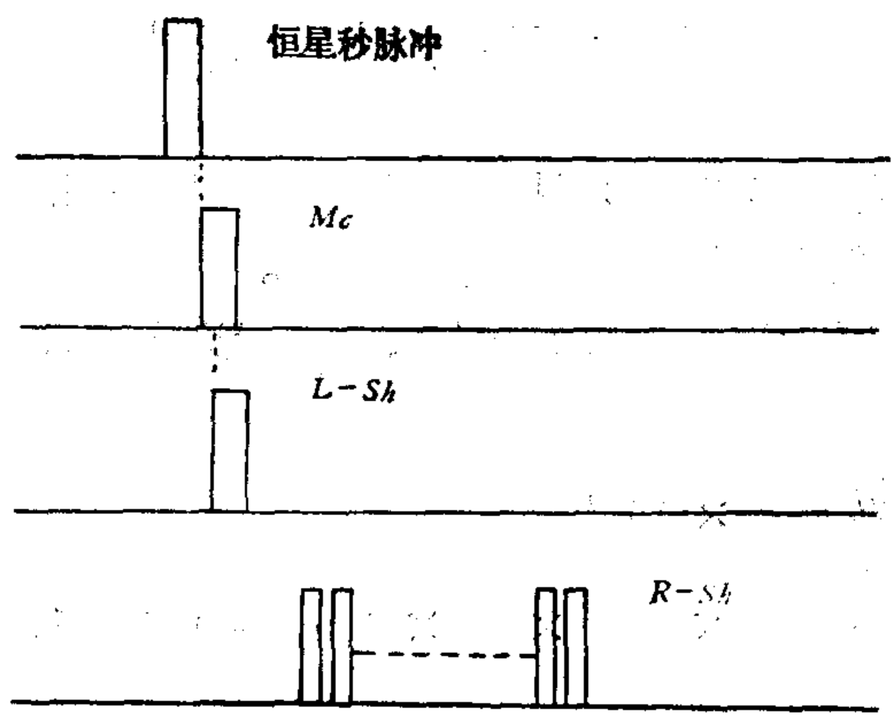


图 2　并行-串行移位寄存器波形图

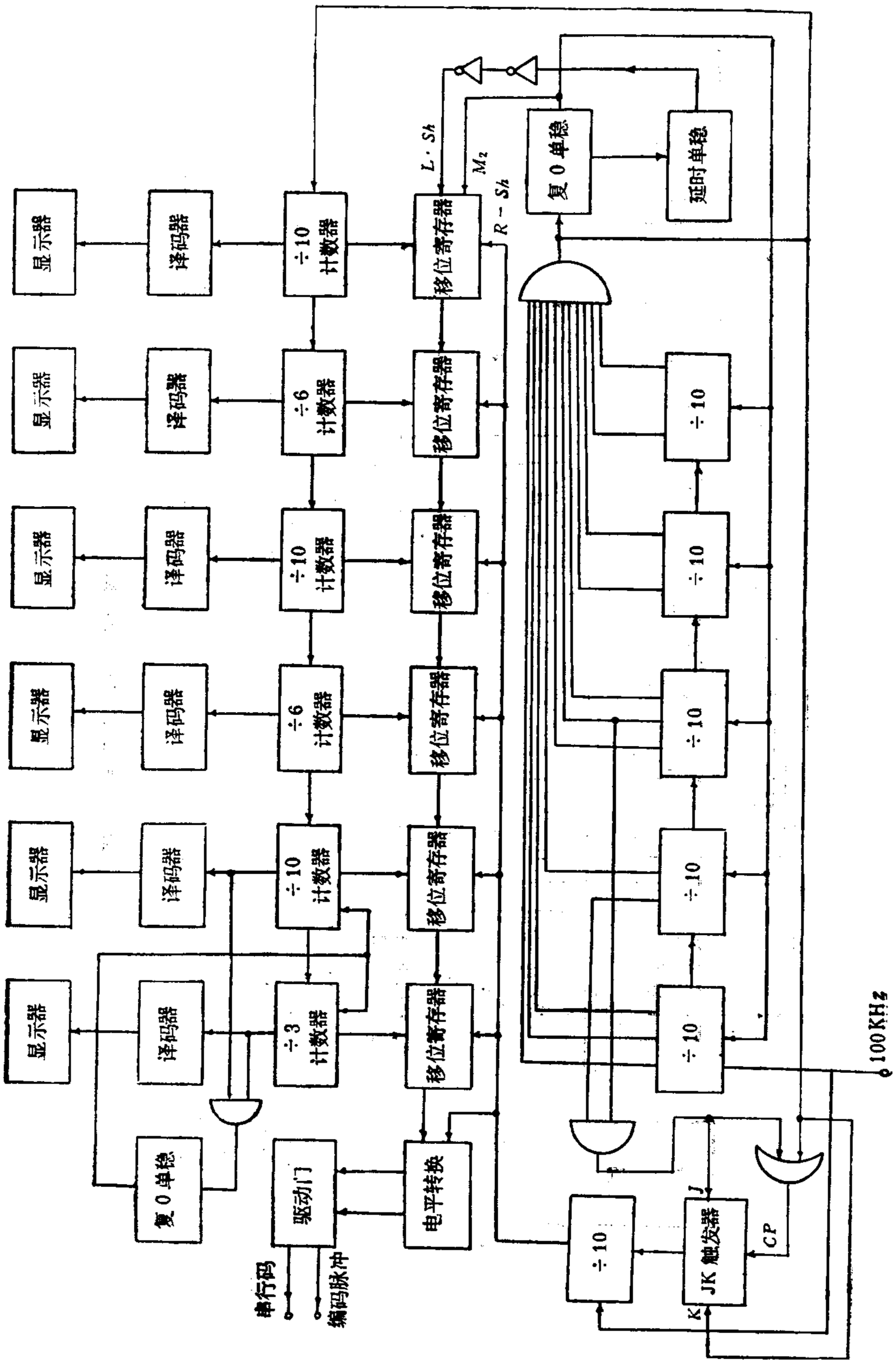


图 3 数字式恒星时钟电原理图

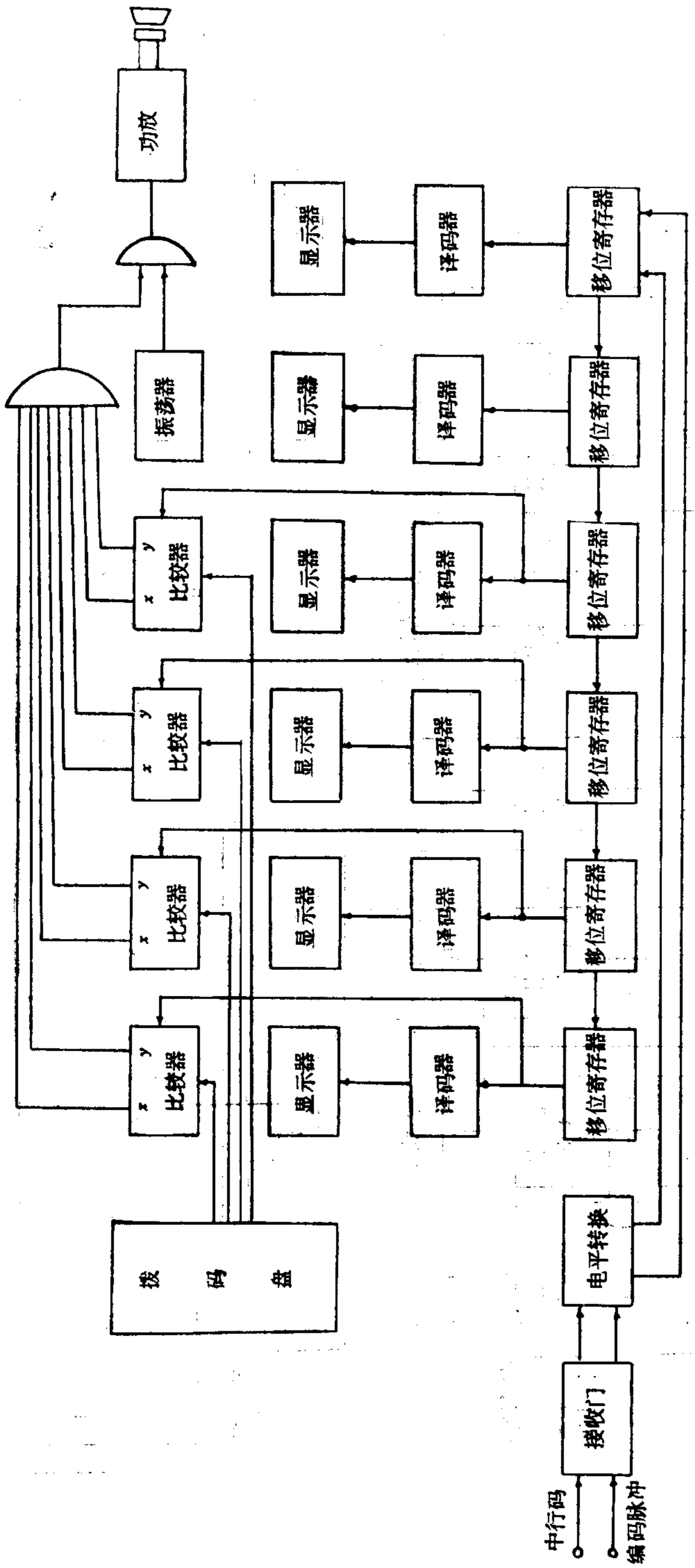


图 4 恒星时子钟电原理图

号，大石英钟的5兆赫石英晶体振荡器的稳定度为 1×10^{-9}/日，100千赫的信号经过5级除10电路，由最后一级算起，五级的状态是99727时，11端与门产生一个脉冲，这就是恒星时的秒脉冲，将此脉冲送去计数就得到恒星时。用此脉冲的后沿产生一个脉宽约为10微秒的脉冲，去将5级除10电路复零，然后开始下一个恒星秒的计时。

移位寄存器将并行的时间码，变成串行的时间码输出，经电平转换后由驱动门送到联结各子钟的电缆，移位寄存器工作时各端的脉冲时间关系如图2。

24个编码脉冲的产生，是由一个独立的除10电路⑥将100千赫的信号分频，由产生的恒星秒脉冲送到 JK 触发器的 K 端，使其开始计数，当分频电路③和②计到24时与门产生一个脉冲送到 JK 触发器的 J 端使除10电路⑥停止计数，这时⑥的输出端就已经产生了24个脉冲，作为编码脉冲。

恒星时母钟的电原理图如图3。

子钟结构简单，子钟可以多个，实际上子钟是一台恒星时数字式石英钟的多个显示面，不用时可断电，这样既方便又安全。

信号通过接收门，经作电位变换送到移位寄存器，将串行输入的时间码变为并行输出，译码后由显示器显示出来。

子钟装有时间报警装置，当移位寄存器的数码和四位拨码盘的数码完全一致时，比较器的 x、y 端皆为1，八端与门将输出高电平，打开控制与门，振荡器的音频信号送到功放，喇叭发出报警的声音。

子钟的电原理图如图4。

四、改 进 意 见

我们研制的平时数字式石英钟和恒星时数字式石英钟，在实际运行中工作稳定可靠，精度较高，但还可以作如下改进：

（1）我们在取恒星时时，将0.9972696近似取为0.99727，这样每一秒就差0.4微秒，一天差35毫秒，一个月将近差一秒，对有些工作而言，这样精度太低。如果我们有一个频率为5013689.5周/秒的恒温晶体，而且稳定度为 5×10^{-9}/日，那么每秒钟的0.4微秒的误差就消除了，这样钟的精度就大大提高了。可以做到5年左右差1秒。要得到这样振荡频率的晶体是不困难的。

（2）现在我们采用的是 P-MOS 电路，如果我们改用 C-MOS 电路和指形显示管，电路的静态功耗可减为现在的1/10，可省一组电源，变压器体积可减小，这样体积小、重量更轻、耗电小的设备更适合野外使用。

THE DIGITAL CRYSTAL CLOCK FOR SOLAR TIME AND SIDEREAL TIME

Tao Guoxiang

(*Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica*)

Abstract

The digital crystal clocks for solar time and sidereal time described in this paper are designed for astrononical and solid earth tide abservations. A crystal oscillator with high stability of 5×10^{-9}/day and IC is adopted. The crystal clock has various kinds of time output and code output in series and parall for user to select. Its function is fully designed and is easy to operate. This device works well and satisfies the requirements in use for several months.

第 4 号　　测量与地球物理集刊　　No. 4
1982 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1982

圆锥投影的变换*

孟 嘉 春

摘　要

点的变换是两地图投影变换的基础。圆锥投影的变换是借助于地球面上的点间接建立的。作者导出了圆锥投影变换的严密公式，正形、等面积和等距离圆锥投影变换的级数展式。两正形圆锥投影变换的公式是任意两圆锥投影变换的最简的展式。一般说来，任意两圆锥投影的变换是一种复杂变换。在一定的制图限差内，在某特定的制图区域内，两正形、等面积、等距离圆锥投影之间的变换和正形圆锥投影变换为等面积圆锥投影，可以分别近似地用相似变换、仿射变换和同素变换来代替。在特殊的场合，圆锥投影的变换才可能是二阶变换。圆锥投影变换公式的特例，仍是方位投影变换的公式。作者指出，建立在二阶变换基础上的电子制图纠正法和机械变换法对应用极广的圆锥投影的变换并不适用。最后，指出了地图投影变换研究的方向。

一、前　　言

圆锥投影的变换是指任意两圆锥投影之间相互变换的问题。详细地说，就是研究以各种不同的圆锥投影所编成的同一制图区域的地图之间的点、线和图形相互变换的问题。直到现在，除大地测量方面的圆锥投影研究之外，尽管圆锥投影极其广泛地应用于中、小比例尺的区域地图的编纂，但是关于这种投影变换的研究还没有进行。

目前，对地图编纂具有实践意义的变换有：相似变换、仿射变换、同素变换[1,2]和二阶变换[2]。近些年来，国内外对上述变换原理进行了一些仪器研究。在这些研究中，对基于乌尔马也夫提出的二阶变换的仪器尤为注意[5,6]。可惜，我们并不知道圆锥投影变换的性质是否符合上述变换的特性，以及它们符合的近似程度。

因此，对圆锥投影的变换进行研究，意义甚为重要。在理论上，通过这一研究可以揭示圆锥投影变换的实质；弄清现有的各种变换方法是否对圆锥投影适用，以及它们符合的近似程度；给探讨其他的地图投影变换方法提供一些必要的材料。实用上，试图解决各种圆锥投影所编地图的内容转换问题，改进地图编制的方法。

现在，我们就来进行这些问题的探讨。

二、圆锥投影变换的基本原理

在曲面和平面之间或两平面之间可能存在一定的对应关系。一般说来，地图投影是

* 本文写于 1964 年 12 月。1974 年 3 月 8 日承蒙胡忠性教授书面审评。1980 年 4 月在湖北省测绘学会第四届综合性学术年会上报告。

曲面和平面之间的对应关系，地图投影变换是两平面之间的对应关系。在这种对应关系中，点的对应的概念有着很大的意义。

设有任意两个投影面，它们的点的对应，可用下列关系式表示：

$$x_2 = f_1(x_1, y_1) \quad y_2 = f_2(x_1, y_1) \tag{1}$$

式中 x_1, y_1 为第一投影面上任意点的笛卡儿直角坐标；x_2, y_2 为第二投影面上对应点的笛卡儿直角坐标。

这两个面之间点的对应是这样一种对应：第一投影面上给定区域内的任意点，在第二投影面上对应区域内必有一点而且仅有一点与之相对应；这时，函数 f_1 和 f_2 与其偏导数在给定的区域内是处处连续、可导的。

我们也可以把方程(1)视为坐标 x_1, y_1 变换为坐标 x_2, y_2 的公式，并说是点的变换。这种点的变换，对于已知的任意两地图投影来说，可以用以下的方式把它们联系起来，并导出点的变换公式。

众所周知，通常，地图投影是看作椭球面(或球面)和平面之间点的对应来确定的。这时，设有任意两地图投影，它们的方程以下列关系式表示：

$$x_1 = \phi_1(\varphi, \lambda) \quad y_1 = \phi_2(\varphi, \lambda) \tag{2a}$$

$$x_2 = \psi_1(\varphi, \lambda) \quad y_2 = \psi_2(\varphi, \lambda) \tag{2b}$$

这里，λ, φ 为地球椭球面(或球面)上任意点的经纬度。

若从方程 (2a) 反求出 φ 和 λ，把它们以 x_1 和 y_1 的表达式置入方程 (2b)，即得方程(1)。

这就是说，第一投影中任意点的坐标变换为第二投影中对应点的坐标，可以先使第一投影中任意点的坐标 x_1, y_1 变换为椭球面（或球面）上对应点的地理坐标 φ, λ，再由该点变换为第二投影中的对应点坐标 x_2, y_2。这就是两地图投影的点的变换之基本原理。线和图形可以看作是点的总和。因此，就可把方程(1)视为由任一地图投影向另一投影变换的公式。

对于圆锥投影和具有纬线为圆弧的地图投影而言，它们的方程常用极坐标表之。这时，投影有如下的关系式：

$$x = F_1(\rho, \theta) \quad y = F_2(\rho, \theta) \tag{3}$$

$$\rho = X_1(\varphi, \lambda) \quad \theta = X_2(\varphi, \lambda) \tag{4}$$

式中 ρ 为投影的纬线半径；θ 为经线间的夹角。

设已知由(3)和(4)表示的两地图投影的方程。欲求这两个投影的点的变换公式(1)，必须首先反求出第一投影的下列方程：

$$\rho_1 = F'_1(x_1, y_1) \quad \theta_1 = F'_2(x_1, y_1)$$

$$\varphi = X'_1(\rho_1, \theta_1) \quad \lambda = X'_2(\rho_1, \theta_1)$$

然后将这些方程置入如(4)和(3)的第二投影的方程式，即得圆锥投影的变换公式(1)。

三、圆锥投影变换的严密公式

在圆锥投影中，任意点的笛卡儿直角坐标 x, y 和它的极坐标 ρ, θ 之间有下列关系

式：

$$\rho_0 - x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta \tag{5}$$

$$\theta = \alpha\lambda \tag{6}$$

式中 ρ_0 为任意常数，表示直角坐标系原点所在的纬线半径；α 为投影的圆锥常数，等于中央纬线的纬度的正弦；λ 为地球面上任意两点的经度差。

方程（5）可以看作圆锥投影中任意点的极坐标变换为笛卡儿直角坐标的公式。下面我们写出点的笛卡儿直角坐标变换为极坐标的公式。

由方程(5)的两式消去 ρ，得

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{\rho_0 - x} \tag{7}$$

或

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{\rho_0 - x} \tag{8}$$

将上式分别代入方程(5)和(6)，得

$$\rho = \frac{\rho_0 - x}{\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\rho_0 - x}\right)} \tag{9a}$$

或

$$\rho = \frac{y}{\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{\rho_0 - x}\right)} \tag{9b}$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{\rho_0 - x} \tag{10}$$

设有两圆锥投影，它们的量值各以脚标 1,2 区别。若已知两投影的常数 α_1，ρ_{01}；α_2，ρ_{02} 和第一圆锥投影中任意点的笛卡儿直角坐标 x_1，y_1，这时，可以写出

$$\theta_2 = \alpha_2\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1} \tag{11}$$

$$\rho_{02} - x_2 = \rho_2\cos\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right) \tag{12}$$

$$y_2 = \rho_2\sin\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)$$

显然，方程组(12)表明，只要能够导出 ρ_2 是 x_1，y_1 的函数，也就是只要能够导出 ρ_2 是 ρ_1 的函数（按公式(9)知，ρ_1 可以由 x_1，y_1 求得），我们就可以根据两圆锥投影的常数使第一投影中任意点的直角坐标变换为第二投影的对应点的直角坐标。

从方程组(12)消去 ρ_2，得

$$\begin{aligned}\rho_{02} - x_2 &= y_2\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)\\ y_2 &= (\rho_{02} - x_2)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

这组公式表明，如果已知两圆锥投影的诸常数和第一投影中任意点的坐标及其在第二投影中的一个对应坐标，则根据(13)式之一即可求得该点在第二投影中的另一对应坐标。

显而易见，方程组(12)和(13)就是任意两圆锥投影之间变换的严密公式。

现在讨论两圆锥投影的纬线半径 ρ 之间的关系。

圆锥投影按变形性质通常分为正形、等面积和等距离三类。而每类圆锥投影又都有几种确定投影常数的方法。这样，圆锥投影之间的变换可以分为变形性质相同的和不同的两种类型。前一变换是由于制图区域所用的圆锥投影常数确定方法和选取的起始纬线不同引起的；后一变换则主要由变形性质不同所引起，其中也可包括产生前一变换的因素。

大家知道，在正形圆锥投影中，有

$$\rho = \frac{C}{U^{\alpha}} \tag{14}$$

$$U = \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^{e}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)} \tag{15}$$

$$\sin\psi = e\sin\varphi \tag{16}$$

式中 C 为积分常数，是投影上的赤道半径。顺便指出，在等距离投影中，C 的几何意义也是如此。等面积投影的 C 则为任意常数。e 为地球椭球面的第一离心率。

对于地球面上的任意点，由于它在两正形圆锥投影上的投影点是同一点的投影，所以(14)式中的 U 是相等的。故得：

$$\rho_2 = C_2\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} \tag{17}$$

而等距离圆锥投影有

$$\rho = C - s \tag{18}$$

这时，椭球面上的任意点在两等距离投影中存在如下的关系

$$\rho_2 = C_2 - C_1 + \rho_1 \tag{19}$$

同理，可以写出等面积圆锥投影的下列方程：

$$\rho^2 = \frac{2}{\alpha}(C - S) \tag{20}$$

$$\rho_2^2 = \frac{2(C_2 - C_1)}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\rho_1^2 \tag{21}$$

式中，s 和 S 分别表示椭球面上任意点的子午线弧长和梯形面积。

上面所述的任意两个变形性质相同的圆锥投影纬线半径之间的关系，我们是把地球面看作椭球面来讨论的。在考察变形性质不同的这种关系时，为简化起见，我们把地球面视作半径 R 的球面，并仅讨论中国惯用的正形和等面积圆锥投影之间的变换。这时，正形和等面积投影的量值分别以脚标 1 和 2 表示之。

大家知道，球体正形圆锥投影的方程为

$$\rho_1 = C_1 \mathrm{ctg}^{\alpha_1}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \tag{22}$$

$$\sqrt[\alpha_1]{\frac{\rho_1}{C_1}} = \mathrm{ctg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}}$$

$$\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1} = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{C_1^{2/\alpha_1} - \rho_1^{2/\alpha_1}}{C_1^{2/\alpha_1} + \rho_1^{2/\alpha_1}} \tag{23}$$

球体等面积圆锥投影的基本公式如下：

$$\rho_2^2 = \frac{2R^2}{\alpha_2}(C_2 - \sin\varphi) \tag{24}$$

$$\sin\varphi = C_2 - \frac{\alpha_2}{2R^2}\rho_2^2 \tag{25}$$

对于球面上的任意点，由(23)和(25)知，它在正形和等面积圆锥投影中的对应点有下列等式存在

$$\frac{C_1^{2/\alpha_1} - \rho_1^{2/\alpha_1}}{C_1^{2/\alpha_1} + \rho_1^{2/\alpha_1}} = C_2 - \frac{\alpha_2}{2R^2}\rho_2^2 \tag{26}$$

因此，我们求得正形圆锥投影的纬线半径变换为等面积圆锥投影的公式为

$$\rho_2^2 = \frac{2R^2}{\alpha_2}\left(C_2 - \frac{C_1^{2/\alpha_1} - \rho_1^{2/\alpha_1}}{C_1^{2/\alpha_1} + \rho_1^{2/\alpha_1}}\right) \tag{27}$$

而由(26)式又得等面积圆锥投影的纬线半径变换为正形圆锥投影的公式

$$C_1^{2/\alpha_1} - C_1^{2/\alpha_1}\left(C_2 - \frac{\alpha_2}{2R^2}\rho_2^2\right) = \rho_1^{2/\alpha_1} + \rho_1^{2/\alpha_1}\left(C_2 - \frac{\alpha_2}{2R^2}\rho_2^2\right)$$

$$\rho_1^{2/\alpha_1} = \frac{C_1^{2/\alpha_1}\left(1 - C_2 + \frac{\alpha_2}{2R^2}\rho_2^2\right)}{1 + C_2 - \frac{\alpha_2}{2R^2}\rho_2^2} \tag{28}$$

这样，如果我们已知欲进行变换的两圆锥投影的诸常数，以及第一投影中给定点的直角坐标，那么，按公式(9)可以求出该点在第一投影中的纬线半径 ρ_1；其次，按照所欲变换的两圆锥投影的变形性质，由上述的有关公式求出第二投影中对应于 ρ_1 的纬线半径 ρ_2；最后，将所得的 ρ_2 代入方程组(12)，我们就能使第一圆锥投影中给定点的直角坐标变换为第二圆锥投影中的对应点的直角坐标。

四、圆锥投影变换的级数展式

如上所述，我们知道，圆锥投影之间的变换是一种复杂变换。为了考察圆锥投影变换的性质，以及它和前面所述的地图投影变换方法的比较，我们应用级数展式来讨论。

利用复变函数的性质，将方程组(12)写为

$$\rho_{02}-x_2+iy_2=\rho_2\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)\right]^{\alpha_2/\alpha_1}$$
$$=\rho_2\cos^{\alpha_2/\alpha_1}\left(\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)\left[1+i\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)\right]^{\alpha_2/\alpha_1}$$
$$=\rho_2\left(\frac{\rho_{01}-x_1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1}\left(1+\frac{iy_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} \tag{29}$$

显然，(29)式右端的前一括弧，可以按(9a)式得出 x_1，y_1 的函数，而后一括弧可以按二项式级数展开。这样，如前所述，只要求出所欲变换的两圆锥投影之间任一纬线半径的具体关系式，即 ρ_2 是 ρ_1 的函数，那么，根据(29)式就能导出两圆锥投影中任意对应点的直角坐标变换的级数展式。

现在，设 ρ_2 和 ρ_1 为实变函数，则将(29)式右端的最后一项按二项式级数展开，并使实数和虚数部分分开，得

$$\rho_{02}-x_2=\rho_2\left(\frac{\rho_{01}-x_1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1}\left[1-\frac{1}{2}a_1\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2+\frac{1}{24}a_2\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4\right.$$
$$\left.-\frac{1}{720}a_3\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^6+\cdots\cdots\right]$$
$$y_2=\rho_2\left(\frac{\rho_{01}-x_1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\left[1-\frac{1}{6}b_1\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2\right. \tag{30}$$
$$\left.+\frac{1}{120}b_2\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4-\frac{1}{5040}b_3\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^6+\cdots\cdots\right]$$

式中

$$a_1=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)$$
$$b_1=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-2\right)$$
$$a_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-2\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-3\right)$$
$$b_2=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-2\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-3\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-4\right) \tag{31}$$
$$a_3=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-5\right)$$
$$b_3=\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-6\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里，$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 是任何异于零和异于所有自然数的实数。在这种情形下，二项式系数 a_1，b_1，a_2，b_2，a_3，b_3，……中的任何一个都不是零。这些系数的计算极为简便。此外，由(31)式看出，二项式系数可以用部分乘积来表述。这样，任意 n 项的二项式系数可以写为

$$a_n=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-k\right) \tag{32}$$

$$b_n = \prod_{k=1}^{2n}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - k\right)$$

因为(30)式可以按二项式级数扩展至任意 n 项，并按级数项的特性，级数的 n 项形式如下：

$$(-1)^n \frac{1}{2n!} a_n \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^{2n}$$

$$(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} b_n \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^{2n}$$

因此，利用上面所述，(30)式可以改写为

$$\begin{aligned} \rho_{02} - x_2 &= \rho_2 \left(\frac{\rho_{01} - x_1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} \left[1 + \sum_1^n (-1)^n \frac{1}{2n!} a_n \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^{2n}\right] \\ y_2 &= \rho_2 \left(\frac{\rho_{01} - x_1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{y_1}{\rho_{01} - x_1} \left[1 + \sum_1^n (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} b_n \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^{2n}\right] \end{aligned} \tag{33}$$

这里，应该指出，展式(33)仅在 $\left|\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right| < 1$，即 $|x_1| + |y_1| < |\rho_{01}|$ 时(绝对)收敛，其收敛速度视 $|x_1| + |y_1| < |\rho_{01}|$ 的程度而定。并且，如上所设，只要 ρ_2 和 ρ_1 为实变函数，或者求得 $\rho_2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1}$ 是 x_1，y_1 的函数，则展式(33)就是任何变形性质都适用的圆锥投影的坐标变换公式。

若注意到公式(17)，因有

$$\rho_2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} = C_2\left(\frac{1}{C_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} = K \tag{34}$$

则由(33)式得两正形圆锥投影之间对应点的坐标变换展式为

$$\begin{aligned} \rho_{02} - x_2 &= K(\rho_{01} - x_1)^{\alpha_2/\alpha_1} \left[1 + \sum_1^n (-1)^n \frac{1}{2n!} a_n \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^{2n}\right], \\ y_2 &= K\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_1 (\rho_{01} - x_1)^{\alpha_2/\alpha_1 - 1} \left[1 + \sum_1^n (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} b_n \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^{2n}\right] \end{aligned} \tag{35}$$

显然，公式(35)表明，只有常数 K 是正形圆锥投影变换的特征，因为对一切非正形圆锥投影(包括与正形投影)的变换来说，$\rho_2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1}$ 不是常数，而是 x_1，y_1 的函数。这就是说，正形圆锥投影变换的公式是任意两圆锥投影变换的最简的展式。作者 1964 年在“论地图投影的基本微分方程”中已经证明：正形(等角)投影乃是地图投影中的一种最简的投影。因此，这里顺便指出，在满足地图编纂的条件下，就地图投影及其变换来说，“视正形投影为选择投影时之必要条件”[3]的说法，是可取的。

在求一切非正形圆锥投影变换的展式时，我们总是先求出(33)式中的 $\rho_2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1}$。并且，在讨论变形性质给定的具体的圆锥投影变换展式之前，我们先写出以后将要引用的展式。

将公式(10)和(11)展成级数，有

$$\alpha_1\lambda = \operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1} = \frac{y_1}{\rho_{01}-x_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^5 - \cdots\cdots$$

$$\alpha_2\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1} - \frac{\alpha_2}{3\alpha_1}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^3 + \frac{\alpha_2}{5\alpha_1}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^5 + \cdots\cdots \tag{36}$$

这里，上述级数都是仅在 $|x_1| + |y_1| \leqslant |\rho_{01}|$ 时收敛。

这时，利用级数代入级数原理，可得

$$\cos\alpha_1\lambda = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4 - \cdots\cdots$$

$$\sin\alpha_1\lambda = \frac{y_1}{\rho_{01}-x_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^5 - \cdots\cdots$$

$$\cos\alpha_2\lambda = 1 - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{3\alpha_1^2}\left(1+\frac{\alpha_2^2}{8\alpha_1^2}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4 - \cdots\cdots \tag{37}$$

$$\sin\alpha_2\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1} - \frac{\alpha_2}{3\alpha_1}\left(1+\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^3 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{1}{5}+\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2^4}{120\alpha_1^4}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^5 - \cdots\cdots$$

大家知道，对于任意的 $\alpha_i\lambda(i=1,2)$ 值，$\cos\alpha_i\lambda$ 和 $\sin\alpha_i\lambda$ 的级数都成立。所以，将级数(36)代入 $\cos\alpha_i\lambda$ 和 $\sin\alpha_i\lambda$ 后，新级数(37)的收敛半径依然是 $|x_1| + |y_1| \leqslant |\rho_{01}|$。

现在，若将(37)的前二式分别代入第一圆锥投影的(9a)和(9b)式中，则均可求得

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_{01}-x_1}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4 - \cdots\cdots\right] \tag{38}$$

$$\rho_1 = (\rho_{01}-x_1)\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4 + \cdots\cdots\right] \tag{39}$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} = \frac{1}{(\rho_{01}-x_1)^{\alpha_2/\alpha_1}}\left[1 - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2 + \left(\frac{3\alpha_2}{8\alpha_1}+\frac{a_1}{8}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4 - \cdots\cdots\right] \tag{40}$$

这样，对于等距离圆锥投影，应用公式(19)、(39)和(40)，求得

$$\rho_2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} = \frac{1}{(\rho_{01}-x_1)^{\alpha_2/\alpha_1}}\left[C_2 - C_1 + \rho_{01} - x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\frac{y_1^2}{\rho_{01}-x_1} - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1}(C_2-C_1)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)y_1\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^3 + \frac{C_2-C_1}{8}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4 + \cdots\cdots\right] \tag{41}$$

将上式代入(33)，级数相乘，得任意两等距离圆锥投影的坐标变换展式为

$$\rho_{02} - x_2 = C_2 - C_1 + \rho_{01} - x_1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)\frac{y_1^2}{\rho_{01}-x_1}$$

$$- \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}(C_2 - C_1) \cdot \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2$$
$$- \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_2^2}{3\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^4}{6\alpha_1^4}\right) y_1 \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^3$$
$$+ \frac{\alpha_2^2}{3\alpha_1^2}\left(1 + \frac{\alpha_2^2}{8\alpha_1^2}\right)(C_2 - C_1)\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4 + \cdots\cdots \tag{42}$$

$$y_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\left[C_2 - C_1 + \rho_{01} - x_1 + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)\frac{y_1^2}{\rho_{01} - x_1}\right.$$
$$- \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\right) \cdot (C_2 - C_1)\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2$$
$$- \frac{1}{120}\left(11 - 10\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^4}{\alpha_1^4}\right) y_1 \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^3$$
$$\left. + \left(\frac{1}{5} + \frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^4}{120\alpha_1^4}\right)(C_2 - C_1)\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4 + \cdots\cdots\right]$$

这里，级数的收敛区间仍是 $|x_1| + |y_1| < |\rho_{01}|$；常数 α_i 和 $C_i(i = 1, 2)$ 是按地球椭球体计算的。

对于任意两等面积圆锥投影的变换，可以将(21)式写为

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\,\rho_1\left(1 + \frac{2(C_2 - C_1)}{\alpha_1\rho_1^2}\right)^{1/2}$$

实际上，不管常数 α_i 和 $C_i(i = 1, 2)$ 取怎样的数值，$2(C_2 - C_1)/\alpha_1\rho_1^2$ 总是小于 1。这样，上式就可展为下列级数：

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\,\rho_1\left\{1 + \frac{C_2 - C_1}{\alpha_1\rho_1^2} - \frac{1}{2}\frac{(C_2 - C_1)^2}{\alpha_1^2\rho_1^4} + \frac{1}{2}\frac{(C_2 - C_1)^3}{\alpha_1^3\rho_1^6} - \cdots\cdots\right\}$$

注意到(39)、(38)和它的各次幂

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2\left[1 - \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4 - \cdots\cdots\right]$$
$$\frac{1}{\rho_1^4} = \left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4\left[1 - 2\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2 + 3\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4 - \cdots\cdots\right]$$

我们得

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(\rho_{01} - x_1)\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2 + \frac{C_2 - C_1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2\right.$$
$$- \frac{1}{8}\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4 - \frac{C_2 - C_1}{2\alpha_1}y_1^2\left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4$$
$$\left. - \frac{(C_2 - C_1)^2}{2\alpha_1^2}\left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4 + \cdots\cdots\right\}$$

$$\rho_2\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(\rho_{01} - x_1)^{1-\alpha_2/\alpha_1}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2\right.$$
$$\left. + \frac{C_2 - C_1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + a_1 - 1\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4\right.$$

$$-\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{C_2-C_1}{2\alpha_1}y_1^2\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4$$
$$-\frac{(C_2-C_1)^2}{2\alpha_1^2}\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4+\cdots\cdots\Big\} \tag{43}$$

因此，将上式代入(33)式，级数相乘后，得两等面积圆锥投影变换的级数展式为

$$\rho_{02}-x_2=\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(\rho_{01}-x_1)\left\{1-\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2\right.$$
$$+\frac{C_2-C_1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2+\left[\frac{1}{8}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)(2a_1+1)\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_1}{8}+\frac{a_2}{24}\right]\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4-\left(a_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+1\right)\frac{C_2-C_1}{2\alpha_1}$$
$$\left.\cdot y_1^2\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4-\frac{(C_2-C_1)^2}{2\alpha_1^2}\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$
$$y_2=\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}y_1\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2\right. \tag{44}$$
$$+\frac{C_2-C_1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2+\left[\frac{1}{24}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-1\right)(2b_1+3)\right.$$
$$\left.+\frac{a_1}{8}+\frac{b_2}{120}\right]\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4-\left(\frac{b_1}{3}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+1\right)$$
$$\left.\cdot\frac{C_2-C_1}{2\alpha_1}y_1^2\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4-\frac{(C_2-C_1)^2}{2\alpha_1^2}\left(\frac{1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

式中 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\cdots$ 是二项式系数，它的计算见(31)；级数的收敛区间是 $|x_1|+|y_1|<|\rho_{01}|$。

最后，我们推求正形圆锥投影变换为等面积圆锥投影的级数展式。为此，将(27)式改写为

$$\rho_2^2=\frac{2R^2}{\alpha_2}\left(C_2+1-\frac{2C_1^{2/\alpha_1}}{C_1^{2/\alpha_1}+\rho_1^{2/\alpha_1}}\right)$$
$$\rho_2=\frac{2R}{\sqrt{\alpha_2}}\left(\frac{C_2+1}{2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1}}\right)^{1/2} \tag{45}$$

因为积分常数 C_1 为正形圆锥投影的赤道半径，ρ_1/C_1 和(45)式右端括弧内第二项之值都小于一；因此，可将(45)展开为下列级数：

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1}}=1-\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1}+\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{4/\alpha_1}-\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{6/\alpha_1}+\cdots\cdots$$

$$\rho_2=\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}R\left\{1-\frac{1}{(C_2+1)\left(1+\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1}\right)}\right.$$

$$-\frac{1}{2(C_2+1)^2\left(1+\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{2(C_2+1)^3\left(1+\left(\frac{\rho_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1}\right)^3}-\cdots\cdots\Bigg\}$$

$$=\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}R\left(C_{20}+C_{21}\rho_1^{2/\alpha_1}-C_{22}\rho_1^{4/\alpha_1}+C_{23}\rho_1^{6/\alpha_1}-\cdots\cdots\right)$$

式中

$$C_{20}=1-\frac{1}{C_2+1}+\frac{1}{2(C_2+1)^2}-\frac{1}{2(C_2+1)^3}-\cdots\cdots$$

$$C_{21}=\frac{1}{C_1^{2/\alpha_1}}\left[\frac{1}{C_2+1}+\frac{1}{(C_2+1)^2}+\frac{3}{2(C_2+1)^3}+\cdots\cdots\right]$$

$$C_{22}=\frac{1}{C_1^{4/\alpha_1}}\left[\frac{1}{C_2+1}+\frac{3}{2(C_2+1)^2}+\frac{3}{(C_2+1)^3}+\cdots\cdots\right]$$

$$C_{23}=\frac{1}{C_1^{6/\alpha_1}}\left[\frac{1}{C_2+1}+\frac{2}{(C_2+1)^2}+\frac{5}{(C_2+1)^3}+\cdots\cdots\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

显然，系数 $C_{2i}(i=0,1,2,3,\cdots\cdots)$ 与级数展开的幂次有关。这里，仅将(45)式右端展至三次项，保证级数精确到 ρ_1/C_1 的 $6/\alpha_1$ 次项，$6/\alpha_1$ 次项以上的都略去不计。此外，上述级数都在 $\rho_1/C_1<1$ 时绝对收敛。

现在，将(39)式中的诸量值看作这里所述的正形圆锥投影的量值，并将它代入上式，得

$$\rho_2=\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}R\left\{C_{20}+C_{21}(\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1}\left[1+\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{1}{\alpha_1}-1\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4+\cdots\cdots\right]-C_{22}(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1}$$

$$\cdot\left[1+\frac{2}{\alpha_1}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2+\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{2}{\alpha_1}-1\right)\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4+\cdots\cdots\right]+\cdots\cdots\right\}$$

此外，如果将(12)式和(37)的后面二式用到这里，可以写出

$$\frac{\rho_{02}-x_2}{\rho_2}=\cos\alpha_2\lambda=1-\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2$$

$$+\frac{\alpha_2^2}{3\alpha_1^2}\left(1+\frac{\alpha_2^2}{8\alpha_1^2}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^4-\cdots\cdots$$

$$\frac{y_2}{\rho_2}=\sin\alpha_2\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right.\right.\tag{37a}$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}\right)\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}\right.\right.$$

$$+\frac{\alpha_2^4}{120\alpha_1^4}\Big)\Big(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\Big)^4-\cdots\cdots\Big\}$$

这样，使上述二级数相乘后，我们得正形圆锥投影变换为等面积圆锥投影的展式如下：

$$\rho_{02}-x_2=\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}R\Big\{C_{20}+C_{21}(\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1}-\frac{C_{20}\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\Big(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\Big)^2$$
$$+C_{21}\Big(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\Big)y_1^2(\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1-2}$$
$$+C_{21}\Big[\frac{1}{2\alpha_1}\Big(\frac{1}{\alpha_1}-1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\Big)$$
$$+\frac{\alpha_2^2}{3\alpha_1^2}\Big(1+\frac{\alpha_2^2}{8\alpha_1^2}\Big)\Big](\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1-4}y_1^4$$
$$+\frac{C_{20}\alpha_2^2}{3\alpha_1^2}\Big(1+\frac{\alpha_2^2}{8\alpha_1^2}\Big)\Big(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\Big)^4$$
$$-C_{22}(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1}-C_{22}\Big(\frac{2}{\alpha_1}-\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1^2}\Big)(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1-2}y_1^2-C_{22}$$
$$\cdot\Big[\frac{1}{\alpha_1}\Big(\frac{2}{\alpha_1}-1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\Big)+\frac{\alpha_2^2}{3\alpha_1^2}\Big(1+\frac{\alpha_2^2}{8\alpha_1^2}\Big)\Big]$$
$$\cdot(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1-4}y_1^4+\cdots\cdots\Big\}$$

$$y_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}\frac{Ry_1}{\rho_{01}-x_1}\Big\{C_{20}+C_{21}(\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1}$$
$$-C_{20}\Big(\frac{1}{3}+\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}\Big)\Big(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\Big)^2$$
$$+C_{21}\Big(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{3}-\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}\Big)(\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1-2}y_1^2$$
$$+C_{21}\Big(\frac{1}{5}-\frac{5}{6\alpha_1}+\frac{1}{2\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2^4}{120\alpha_1^4}\Big)$$
$$\cdot(\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1-4}y_1^4+C_{20}\Big(\frac{1}{5}+\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2^4}{120\alpha_1^4}\Big)$$
$$\cdot\Big(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\Big)^4-C_{22}(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1}$$
$$-C_{22}\Big(\frac{2}{\alpha_1}-\frac{1}{3}-\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}\Big)(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1-2}y_1^2$$
$$-C_{22}\Big[\frac{2}{\alpha_1^2}+\frac{1}{5}-\frac{5}{3\alpha_1}+\frac{\alpha_2^2}{6\alpha_1^2}\Big(1-\frac{2}{\alpha_1}\Big)+\frac{\alpha_2^4}{120\alpha_1^4}\Big]$$
$$\cdot(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1-4}y_1^4+\cdots\cdots\Big\}\qquad(46)$$

这里，应该注意的是，正形和等面积圆锥投影的常数，是按地球面作为球面计算的，因为圆锥常数小于 1，$\rho_{01}-x_1$ 的 $\frac{2}{\alpha_1}$、$\frac{4}{\alpha_1}$、…… 次项应该与级数所展项的最高幂次相应，高于它的各项可以略去；系数 $C_{2i}(i=0,1,2,\cdots\cdots)$ 的计算也是如此，

同理，可以求出其它变形性质不同的两圆锥投影变换的展式。限于篇幅，这里就不再赘述了。

五、圆锥投影变换的性质

分析上述任意两圆锥投影变换的级数展式，我们可得如下的结论：

(1) 任意两圆锥投影的变换，不管它们的变形性质怎样，在 $\rho_{02}-x_2$ 和 y_2 的展式中，如果暂且不考虑它们的系数不同的话，则两展式中对应级数项的符号和因子完全相同，而 y_2 的展式是 $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{y_1}{\rho_{01}-x_1}$ 和 $\rho_{02}-x_2$ 展式的乘积。对于两正形圆锥投影的变换，则 $\rho_{02}-x_2$ 是 $\dfrac{y_1}{\rho_{01}-x_1}$ 的偶次幂，y_2 是 $\dfrac{y_1}{\rho_{01}-x_1}$ 的奇次幂。

(2) 从任意两圆锥投影变换展式的级数项（至少在本文讨论的各种变换中）可知，级数的因子和幂次的复杂性是随两正形投影的变换逐渐向等面积投影之间的变换递增的，并且还向正形和等面积投影间的变换递增。如前所述，我们知道，两正形圆锥投影的变换是任意两圆锥投影之间的一种最简的变换。这表现在级数的系数和级数计算的简便。此外，在两等距离、等面积圆锥投影间的变换，以及正形和等面积圆锥投影的变换中，都包含有两正形投影变换的级数项，而且级数项的符号、因子和幂次完全相同。

(3) 若欲比较两个任意两圆锥投影的变换，只要比较 (33) 式中的 $a_n, b_n(n=1,2,\cdots\cdots)$ 和 $\rho_2\left(\dfrac{1}{\rho_1}\right)^{\alpha_2/\alpha_1}$，就可以看出两种变换的差异。例如，要比较标准纬线选取在 24°，48°；25°，45° 和 25°，47° 的兰勃脱正形圆锥投影的变换，我们只要比较常数 K 和系数 a_n, b_n，就不难求得它们的差别。

(4) 现在，我们考察圆锥投影变换的级数展式和现已提出的地图投影变换方法的关系，以及它们符合的近似程度。

对于任意两正形圆锥投影的变换，由(35)式可知，当 $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\to 1$ 时，因 $a_n\to 0$，$b_n\to 0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$，则有

$$\rho_{02}-x_2=K(\rho_{01}-x_1)\quad y_2=Ky_1 \tag{47}$$

显然，当两正形投影的圆锥常数之差甚小时，两正形圆锥投影的变换处处是相似变换。这是其一。其次，当 $y_1=0$ 时，得 $y_2=0$，$\rho_{02}-x_2=K(\rho_{01}-x_1)^{\alpha_2/\alpha_1}$。这就是说，在两正形圆锥投影的中央经线上及其限差允许的邻近带状区域内，当 $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 趋近于 1 时，这两投影的变换是相似变换；当 $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 趋近于 2 时，它们才是二阶变换。再次，当略去 $\left(\dfrac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^3$ 及以上各项时，由(35)式得

$$\rho_{02}-x_2=K(\rho_{01}-x_1)^{(\alpha_2/\alpha_1)-2}\left[(\rho_{01}-x_1)^2-\frac{a_1}{2}y_1^2\right]$$

$$y_2=K\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_1(\rho_{01}-x_1)^{(\alpha_2/\alpha_1)-1} \tag{48}$$

这时，在 $y_1 = 0$ 的情形下，两投影的变换仍属于上述的第二种变换。当 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 趋近于 1 时，则属于第一种变换情形。对于 $x_1 = 0$ 的场合，或者当 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 趋近于 2 时，两正形圆锥投影的变换都是二阶变换。若略去 $\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4$ 和以上各项时，则无论是对于 $x_1 = 0$ 的情形，或是在 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 趋近于 2 时，两投影只有 $\rho_{02} - x_2$ 是二阶变换，横坐标 y_2 则为复杂变换。最后，当略去 $\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2$ 及以上各项时，有

$$\rho_{02} - x_2 = K(\rho_{01} - x_1)^{\alpha_2/\alpha_1} \quad y_2 = K\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_1 (\rho_{01} - x_1)^{(\alpha_2/\alpha_1)-1}$$

显然，当 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 趋近于 1 时，两投影的变换属于上述第一种情形。若 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ 趋近于 2 时，两投影则为二阶变换；这时，在 $x_1 = 0$ 的场合，即在坐标横轴上，它们之间才是仿射变换。这样，尽管正形投影是地图投影中的一种最简的投影，正形圆锥投影的变换是任意两圆锥投影之间的一种最简的变换，但是，除特殊情形外，正形圆锥投影之间的变换不是相似变换、仿射变换、同素变换和二阶变换，而是一种复杂的变换。

对于等面积圆锥投影的变换，从公式(44)看出：① 当 $y_1 = 0$ 时，$y_2 = 0$，

$$\rho_{02} - x_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(\rho_{01} - x_1)\left\{1 + \frac{C_2 - C_1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2 - \frac{(C_2 - C_1)^2}{2\alpha_1^2}\left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^4\right\}$$

这时，在中央经线上，两投影也只有在略去 $\left(\frac{1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2$ 及以上诸项时才是相似变换。②在略去(44)式中 $\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^2$ 及以上各项时，得

$$\rho_{02} - x_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(\rho_{01} - x_1) \qquad y_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} y_1 \tag{49}$$

显然，在这种情形下，任意两等面积圆锥投影之间的变换处处是仿射变换。③在略去 $\left(\frac{y_1}{\rho_{01} - x_1}\right)^3$ 及以上各项的场合，两等面积圆锥投影也仅在 $x_1 = 0$ 的坐标横轴上是二阶变换。除此以外，两等面积圆锥投影之间的变换是复杂变换，而不可能是相似变换、仿射变换、同素变换和二阶变换。

对于任意两等距离圆锥投影的变换，从公式(42)看出：①当 $y_1 = 0$ 时，得 $y_2 = 0$，$\rho_{02} - x_2 = C_2 - C_1 + \rho_{01} - x_1$，即在两投影的中央经线上，等距离圆锥投影之间才是仿射变换。对于可以略去 $\frac{y_1^2}{\rho_{01} - x_1}$ 和它以上各项的情形，我们又得下式表示的仿射变换

$$\rho_{02} - x_2 = C_2 - C_1 + \rho_{01} - x_1 \qquad y_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_1 \tag{50}$$

②对于可以略去 $y_1\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2$ 及其以上各项的情形，得

$$\rho_{02}-x_2=C_2-C_1+\rho_{01}-x_1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)\frac{y_1^2}{\rho_{01}-x_1}$$

$$y_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}(C_2-C_1+\rho_{01}-x_1)$$

在这种情形下，显然，只在 $x_1=0$ 的坐标横轴上，两等距离圆锥投影才可能是二阶变换。除此之外，两等距离圆锥投影之间不会有相似变换、仿射变换、同素变换和二阶变换。

对于正形圆锥投影变换为等面积圆锥投影的情形，我们从(46)式看出：①当 $y_1=0$ 时，有 $y_2=0$，$\rho_{02}-x_2=\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}R\{C_{20}+C_{21}(\rho_{01}-x_1)^{2/\alpha_1}\}$，这里略去了 $C_{22}(\rho_{01}-x_1)^{4/\alpha_1}$ 项。显然，在这种场合，两投影的中央经线也只在 $\alpha_1\to 1$ 时是二阶变换。对于可以略去 $\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^3$ 及其以上各项的情形，两投影在坐标横轴（$x_1=0$）上也是二阶变换。②当 $\left(\frac{\rho_{01}-x_1}{C_1}\right)^{2/\alpha_1}$ 和 $\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2$ 都趋近于零时，也就是说，在制图区域的变换范围愈是接近高纬度地区和中央经线的情形下，下式表明

$$\rho_{02}-x_2=\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}RC_{20},\qquad y_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sqrt{\frac{2(C_2+1)}{\alpha_2}}RC_{20}\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\tag{51}$$

正形圆锥投影变换为等面积圆锥投影可以是同素变换。除此以外，正形和等面积圆锥投影之间的变换都以一种复杂变换表述。

综上所述，任意两圆锥投影的变换是一种复杂变换，而且变形性质给定的两圆锥投影间的这种变换也是各不相同的。但是，在某特定的制图区域和特征线上，在一定的制图限差内，正形、等面积和等距离圆锥投影所编地图之间的变换，可以各别近似地用相似变换、仿射变换、同素变换和二阶变换来描述。例如，当两投影的圆锥常数相差很小时，正形圆锥投影之间的变换可以用相似变换进行；在可以略去 $\left(\frac{y_1}{\rho_{01}-x_1}\right)^2$ 和以上各项的场合，两等面积圆锥投影的变换用仿射变换进行；在略去 $\frac{y_1^2}{\rho_{01}-x_1}$ 和以上各项的情形下，两等距离圆锥投影的变换也可以用仿射变换来替代；对于愈益接近高纬度和中央经线的一定区域，正形圆锥投影变换为等面积圆锥投影时，则可用同素变换来近似地进行。

(5) 直线是点的总和。大家知道，相似变换、仿射变换和同素变换特具的一个重要特性，是一投影面上的直线变换在他投影面上仍为它的对应直线；反之，亦然。换言之，在这些变换中，两投影面上的对应直线具有变换的可逆性。由此可见，在制图限差允许的某一制图区域内，只要给定的两圆锥投影之间的变换是相似变换、仿射变换或同素变换的话，我们就可以认为由这些投影所编的地图上的对应直线具有变换的可逆性。因此，这使圆锥投影间的变换有可能用图解法和图解解析法简便地达到。

在二阶变换中，一投影面上的任意直线，在他投影面上变换为二次曲线。换句话说，任意给定的直线在他投影面上变换为椭圆、抛物线或双曲线，在特殊情形下，直线变换成

圆弧。显然，这用图解法来解决是困难的。如前所述，本文讨论的两圆锥投影的变换通常只在特殊场合是二阶变换，因此，更使地图编绘增添困难。

六、圆锥投影变换的特例

现在，讨论圆锥投影变换公式的几种特殊情形。

如果圆锥投影中直角坐标系原点从制图区域的给定纬度处移到（北）极点，经差改由与原来相差 180° 的经线起算、且其起算方向相反，并设圆锥常数 α 等于 1，则变形性质给定的两圆锥投影的变换就变为相应的方位投影的变换。

事实上，根据假设一，我们有 $\rho_0 = 0$；由假设二，某一经线与起算经线之间的经差可以用 $180°-\lambda$ 来替代。这样，按上述三假设，可以将(5)式写为

$$x = \rho\cos\lambda \quad y = \rho\sin\lambda$$

如果上式用投影中垂直圈间的夹角 ψ 置换 λ，得

$$x = \rho\cos\psi \quad y = \rho\sin\psi \tag{52}$$

众所周知，这是方位投影的一般公式。这样，在前面所述的圆锥投影公式中，只要使它 $\alpha = 1$，$\rho_0 = 0$，并用 x 置换 $-x$，我们得方位投影及其变换的有关公式。

如果在欲变换的两投影中，有一个是方位投影，另一为圆锥投影，那么，只要在圆锥投影变换公式中使它有关的部分满足上述的方位投影条件，我们得方位投影变换为圆锥投影的公式；或者得圆锥投影变换为方位投影的公式。

就理论上说，当 $\alpha = 0$ 时，圆锥投影变为圆柱投影。因此，由圆锥投影变换的公式，可得任意两圆柱投影之间的变换、圆柱投影和方位投影、圆锥投影之间的变换。这些变换的公式因为不能从前述公式直接写出，作者将在另文中讨论。

通常，圆锥投影在地图编制上的应用只限于正投影。在特殊情形下，也有建议采用斜圆锥投影[4]的。而它的特例，斜方位投影和斜圆柱投影（包括横投影在内），在地图编制实践中还是常见的。在斜投影中，如果将任意点的地理坐标 φ，λ 代之以球面坐标 Z，ψ（这里极距 $Z = 90° - \varphi$），则得斜圆锥投影的两常数和坐标公式。然而，鉴于任意两圆锥投影变换的公式是由地球面上同一点导出的，因此，除投影常数外，本文由正投影导出的变换公式不需作任何变更，同样适用于斜圆锥投影之间的变换。

七、结　　语

点的变换是两地图投影变换的基础。圆锥投影的变换是借助地球面上的点间接地建立的。圆锥投影变换的严密公式可以借助现代的计算技术进行，特别是应用它们解决地图编绘问题，可能是今后地图投影变换研究的方向。

一般说来，任意两圆锥投影的变换是一种复杂变换。在一定的制图限差内，在某一特定的制图区域内，两正形、等面积、等距离圆锥投影之间的变换和正形圆锥投影变换为等面积圆锥投影，可以各别近似地用相似变换、仿射变换和同素变换来替代。在特殊的场合，圆锥投影的变换才可能是二阶变换。由此可见，地图投影变换的性质“差不多在每一

个场合下都是不相同的，并且是由对象的性质来决定的”。因此，必须研究给定的两地图投影的变换的特殊性质，才能揭示地图投影变换的实质。这是地图投影变换研究的一个方面。

另一方面，鉴于建立在二阶变换基础上的电子制图纠正法和机械变换法，对应用极广的圆锥投影变换并不适用，相似变换、仿射变换和同素变换也有很大的局限性，因此，必须在研究各类地图投影变换本质的基础上，探求新的地图投影变换方法，为仪器研制提供牢靠的理论依据。

参 考 文 献

[1] Урмаев, Н. А., Теория гомографического преобразования и её применение к математической картографии и составлению карт. Труды ЦНИИГАиКГУГК, вып. 113, Геодезиздат, Москва, 1956.

[2] Урмаев, Н. А., Теоретические основы способов составления карт. Сборник рефератов ЦНИИГАиКГУГК, вып. 3, стр. 35—43, Москва, 1955.

[3] 叶雪安：地图投影，1953 年，第 2 页，龙门联合书局。

[4] Урмаев, Н. А., катематическая Картография, Москва, 1941.

[5] М. П. 勃尔久科夫著，郑家声译，楼敬祥校：电子制图纠正仪，测绘译报，测绘出版社，1960 年，第 6 期，第 26—27 页。

[6] 张家庆：地图投影的机械变换法，1962 年制图学术年会论文选集，上集，第 263—269 页，中国工业出版社，1964 年。

TRANSFORMATION OF CONICAL PROJECTIONS

Meng Jiachun

(Institute of Geodesy and Geophysics, Academia Sinica)

Abstract

Transformation of points is the basis of transformation of two map projections. The transformation of conical projections is indirectly set up with the aid of points on the earth's surface. Rgorous formulas of transformation of the conical projections and expansion in series of transformation of conical orthomorphic equivalent and equidistant conical projections have been derived by the author. The formulas of transformation of some conical orthomorphic projections are the simplest expansion in transformation of the conical projections. In general, transformation of two arbitrary conical projections is a complex one. Within a certain cartographic tolerance and in a specific mapping area, the transformation between two orthomorphic, equivalent and equidistant conical projections and the orthomorphic conical projection transformed into equivalent conical projection may be replaced respectively and approximately by similarity, affine and isotopic transformations. In the special case, transformation of conical projection only may be second-order transformation. The special case of transformation formulas of the conical projections may be still the same formulas of transformation of azimuthal projections. The author considers that the method of electronic cartographic rectifieation and mechanical transformation based on second-order transformation could not be applicable to the use of transformation of conical projections. And finally, directions to study the map projection transformation are pointed out.